T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3- BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞDEĞERLİK PROBLEMİ

Tuna BAYRAKDAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3- BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞDEĞERLİK PROBLEMİ

Tuna BAYRAKDAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 23/08/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

Doç. Dr. Ender ABADOĞLU

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Cansel YORMAZ

ÖZET

3- BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞDEĞERLİK PROBLEMİ

Tuna BAYRAKDAR

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
Eylül 2016, 62 sayfa

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu bir manifold üzerinde tanımlı bir otonom dinamik sistem için yerel eşdeğerlik problemi Cartan'ın eşdeğerlik metodu kullanılarak ele alınmıştır. 3-boyutlu manifold üzerinde tanımlı bir otonom dinamik sistem yerel olarak bi-Hamiltonyen formda ifade edilebildiğinden (Abadoğlu ve Gümral 2009), eşdeğerlik problemi bi-Hamiltonyen yapıyı belirleyen uyumlu Poisson yapılarının eşdeğerliği üzerinden formüle edilmiştir. Bu amaçla, dinamik sistemi ifade eden bir eşçatı tanımlanmış ve problem eşçatılar için eşdeğerlik problemine indirgenmiştir. Otonom dinamik sistemler için eşdeğerlik probleminin çözümü, dinamik sistemin integral eğrisi yönündeki diferensiyel 1-form θ^1'in integre edilip edilememesiyle yani $d\theta^1 \wedge \theta^1 = 0$ ve $d\theta^1 \wedge \theta^1 \neq 0$ durumlarıyla belirlenen iki dala ayrılmıştır. İntegre edilebilir durum için genişletilmiş herhangi iki analitik eşçatının ve dolayısıyla genişletilmiş herhangi iki analitik dinamik sistemin tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenen bir difeomorfizma sınıfı ile her zaman birbirine dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. $d\theta^1 \wedge \theta^1 \neq 0$ durumunda ise yine genişletilmiş herhangi iki analitik dinamik sistemin tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenen bir difeomorfizma sınıfı ile her zaman birbirine dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. İntegre edilemez durum için problem taban manifoldu üzerine indirgenerek, problemin temel yapı invaryantlarının sayısının ve integral eğrisi üzerindeki koordinata bağlılığının dinamik sistemi belirleyen vektör alanının diverjasının sıfır olup olmamasına göre belirlendiği ispatlanmıştır. Diverjansı sıfır olan bir vektör alanı için taban manifoldu üzerinde bileşenleri Hamiltonyenlerin fonksiyonlarına karşılık gelen bir flat konneksiyon tanımlanmıştır. Buna göre problemin temel yapı invaryantlarının ve onların eşçatı türevlerinin dinamik sistemin akış eğrisi boyunca değişmediği, diğer bir ifadeyle, Hamiltonyenler cinsinden yazılabileceği gösterilmiş ve dolayısıyla iki dinamik sistemin eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter şartların sadece Hamiltonyen fonksiyonlarına bağlı olarak belirleneceği gösterilmiştir. Diverjansın sıfırdan farklı olduğu durumda da taban manifoldu üzerinde bir flat konneksiyon elde edilmiş ve problemi temsil eden eşçatının yapı denklemleri hesaplanmıştır. Yapı invaryantlarının tamamının sıfır olması durumunda ise yapı denklemleriyle belirlenen Lie cebiri Heisenberg cebirine izomorfik olduğu ve dolayısıyla problemin tanımlandığı manifoldun yerel olarak Heisenberg grubu olduğu görülmüştür. Bu tez çalışmasının son bölümünde ise Riccati denkleminin dinamik sistemi temsil eden eşçatıyı koruyacak bir kontakt difeomorfizma altındaki eşdeğerlik problemi, Cartan'ın eşdeğerlik metodu vasıtasıyla ele alınmış ve herhangi iki Riccati denkleminin bu tipte bir difeomorfizma yolu ile birbirine dönüştürülebileceği gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dinamik sistemler, Bi-Hamiltonyen yapı, Poisson yapısı, Riccati denklemi, Cartan'ın eşdeğerlik metodu.

JÜRİ: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Danışman)
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Doç. Dr. Ender ABADOĞLU
Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Doç. Dr. Cansel YORMAZ

ABSTRACT

EQUIVALENCE PROBLEM FOR 3-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS

Tuna BAYRAKDAR

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN
September 2016, 62 pages

In this thesis, local equivalence problem for an autonomous dynamical system on a three dimensional manifold is considered by means of Cartan's method of equivalence. Since an autonomous dynamical system on a three dimensional manifold can be expressed locally in a bi-Hamiltonian form (Abadoğlu ve Gümral 2009), the equivalence problem is formulated in terms of equivalence of compatible Poisson structures determining bi-Hamiltonian structure. To this end, a coframe which is describing the dynamical system is defined and problem is reduced to equivalence problem for coframes. The solution of equivalence problem for an autonomous dynamical systems separates into two branches determined by integrability $d\theta^1 \wedge \theta^1 = 0$ and nonintegrability $d\theta^1 \wedge \theta^1 \neq 0$ of differential 1-form θ^1 which is a 1-form along the integral curve of the dynamical system. For integrable case, it is proved that all prolonged analytic coframes, and therefore all prolonged analytic dynamical systems, can be mapped to each other by a class of diffeomorphisms determined by a single function of a one variable. For the latter case, it is also proved that all prolonged analytic coframes, and therefore all prolonged analytic dynamical systems, can be mapped to each other by a class of diffeomorphisms determined by a single function of a one variable. For non-integrable case, problem is reduced to the base manifold and it is proved that number of the fundamental structures invariants and their dependence on a coordinate along the integral curve are determined according to whether the vector field is divergence free or not. For a divergence free vector field a flat connection, whose components are corresponding to the functions of Hamiltonians, is obtained. Accordingly, it is shown that fundamental invariants of the problem and their coframe derivatives are invariant along the flow of the dynamical system, in other words, they can be interpreted as a functions of Hamiltonians and therefore, it is seen that necessary and sufficient conditions for equivalence of dynamical system are determined only by the Hamiltonian functions. Also for a vector field with non-zero divergence a flat connection is obtained on a base manifold and structure equations of coframe, representing a dynamical system, are figured out. In the case of vanishing both of the structures functions, it is seen that Lie algebra determined by structure equations is isomorphic to Heisenberg algebra and thereby underlying manifold is locally Heisenberg group. In the final part of this thesis, equivalence problem for Riccati equation under a contact diffeomorphism, which preserves the coframe representing dynamical system, is considered via Cartan's method of equivalence and it is proved that any two Riccati equation can be mapped to each other by a this type of diffeomorphism.

KEYWORDS: Dynamical systems, Bi-Hamiltonian structure, Poisson structure, Riccati equation, Cartan's method of equivalence.

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Supervisor)
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Assoc. Prof. Dr. Ender ABADOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Cansel YORMAZ

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sürecinin her aşamasında beni destekleyen ve yaptığı kritik yönlendirmelerle bu tezin ortaya çıkmasında önemli katkısı bulunan danışmanım Sayın Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin'e, en başta bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıyan ve bu tez çalışmasında ele alınan problemi bana öneren, problemin her aşamasıyla yakından ilgilenip yaşadığım güçlükleri aşmamı sağlayacak önerilerle beni destekleyen Sayın Doç. Dr. Ender Abadoğlu'na, bu teze başladığım ilk günden son güne kadar beni desteklemekten vazgeçmeyen değerli eşim Zahide Ok Bayrakdar'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR v
İÇİNDEKİLER vi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ vii
1. GİRİŞ 1
2. ÖN BİLGİLER 3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar 3
2.2. Vektör Demetleri 8
2.3. Lie Grupları ve Lie Cebirleri 12
2.4. Vektör Demetleri Üzerinde Konneksiyon 16
2.5. Çatı Demetleri ve Çatı Demetleri Üzerinde Konneksiyon 19
3. 3-BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLER 25
3.1. Poisson Yapısı 25
3.2. Bi-Hamiltonyen Yapı 28
3.3. Riccati Denklemi 29
3.4. Riccati Denklemi için Dönüşüm Kuralı 31
4. CARTAN'IN EŞDEĞERLİK METODU 35
4.1. Eşçatıların Eşdeğerlik Problemi 35
4.2. Türetilmiş İnvaryantlar ve Tasnif Manifoldları 36
4.3. G-değerli Eşdeğerlik Problemi 39
5. DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞDEĞERLİK PROBLEMİ 46
5.1. Dinamik Sistemlerin Eşdeğerlik Probleminin Formülasyonu 46
5.2. Eşdeğerlik Probleminin Çözümü 47
5.3. Riccati Denkleminin Eşdeğerlik Problemi 54
6. SONUÇ 59
7. KAYNAKLAR 60
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$C^\infty(M)$	M üzerindeki tüm differensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
C^i_{jk}	Yapı sabitleri
D	Konneksiyon
dx^i	Koordinat 1-formu
dV	Hacim elemanı
E	Vektör demeti
G	Lie grubu
GL$(n,\mathbb{R})$	Genel lineer grup
$\mathfrak{g}$	Lie cebiri
$\Gamma(E)$	E'nin tüm kesitlerinin kümesi
$H(x)$	Yatay uzay
J^i	Poisson 1-formu
$\mathbf{J}_i$	Poisson vektörü
$\Lambda^p TM$	p-vektörlerin demeti
$\Lambda^p T^*M$	p-formların demeti
M	m-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
$M^{(1)}$	Genişletilmiş manifold
ω	Eşçatı
Ω	Eğrilik matrisi (vektör demeti)
Ω_F	Frenet-Serret konneksiyon formu
Ω	Poisson bi-vektör
P	Çatı demeti
π	Demet İzdüşümü
ϖ	Konneksiyon formu
SO$(n,\mathbb{R})$	Özel ortogonal grup
σ	Belirsizlik derecesi
σ_i	İndirgenmiş Cartan karakterleri
TM	Teğet demeti
T^*M	Kotanjant demeti
T^i_{jk}	Yapı fonksiyonları
θ	Lift edilmiş eşçatı
Θ^j	Torsiyon 2-form

Θ_i^j	Eğrilik 2-form
$\mathfrak{X}(M)$	M üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\oplus$	Direkt Toplam
$V(x)$	Dikey uzay

1. GİRİŞ

Bu çalışmada üç boyutlu otonom dinamik sistemlerin eşdeğerlik problemi incelenecektir. Genel itibariyle bir eşdeğerlik problemi bir manifold üzerindeki iki geometrik nesnenin bir diferensiyel denklem sisteminin çözümü olarak elde edilen bir difeomorfizma sınıfı yoluyla birbirine dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği problemidir. Bu problemin bilinen ilk örneği Poincare'nin 1907'de $\mathbb{C}^2$'de üç reel boyutlu iki hiperyüzeyin biholomorfik olarak eşdeğer olmadığını kanıtlamasıdır (Poincaré 1907). Sonrasında Cartan, bir hiperyüzeyi diğerinden ayıran yerel invaryantları belirleyerek bu eşdeğerlik problemini çözmüş (Cartan 1932) ve takip eden yıllarda bu çözüm geliştirilerek, çeşitli geometrik yapılara ait eşdeğerlik problemlerinin çözümünde genel bir kuram haline dönüştürülmüştür. Bu çalışmaların kısa bir tarihsel özeti için bkz. (Gardner 1989). Cartan eşdeğerlik yöntemi olarak adlandırılan bu yöntem sadece geometrik nesnelerin incelenmesiyle sınırlı kalmamış ve farklı matematiksel yapılara da uygulanmıştır. Bu uygulamaların kapsamlı bir özeti (Olver 1995)'de sunulmaktadır. Bu matematiksel yapılardan biri de diferensiyel denklemlerdir. Cartan, ikinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem için, jeodezik eğrileri bu denklemin integral eğrileri olacak şekilde bir projektif konneksiyon tanımlanabileceğini göstermiştir(Cartan 1924). Yakın geçmişte, ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler ve denklem sistemleri (Morozov 2002), (Kamran vd 1985), (Fels 1995), üçüncü mertebeden adi diferensiyel denklemler (Sato ve Yoshikawa 1998), Riccati denklemi (Czyzycki vd 2010), ikinci mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklemler (Noda 2011), (Morozov 2006), Painleve denklemlerinin bazı tipleri (Kamran vd 1985),(Kartak 2012) eşdeğerlik açısından incelenmiştir. Bunun yanısıra Cartan'ın eşdeğerlik yöntemi varyasyon hesabında (Kamran ve Olver 1989), (Kamran ve Olver 1992), kontrol teorisinde (Gardner ve Shadwick 1987), holonomik olmayan geometrilerde (Ehlers 2002) ve bu çalışmada tarafımızca ele alınan probleme yakın bir problem olan, kovaryant ve kontravaryant nesnelerle ifade edilen geometrik yapıların eşdeğerlik probleminde de kullanılmıştır (Gardner ve Shadwick 1991).

Eşdeğerlik probleminin temeli incelenen belli bir forma ya da özelliğe sahip olan iki geometrik nesnenin belirli türdeki bir difeomorfizma sınıfı yoluyla birbirine dönüştürülmesidir. Ancak böyle bir difeomorfizmanın bulunması her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin bir manifold üzerindeki herhangi iki metrik birbirine eşdeğer olmayabilir. İki metriğin birbirine eşdeğer olabilmesinin şartı metrik konneksiyonların eğriliğinin birbirine eşit olmasıdır. Bunun yanısıra, eşdeğerlik problemi seçilen difeomorfizma sınıfıyla da yakından ilişkilidir. Örneğin yukarıda sözü edilen metrik eşdeğerliği probleminde difeomorfizmalar, Jacobian matrisleri ortogonal olan difeomorfizmalarla sınırlandırılacak olursa, her metrik ancak kendisine eşdeğer olabilecektir. Bu çerçevede eşdeğerlik probleminin iyi tanımlanabilmesi için hem incelenen nesnenin eşdeğerliğe esas teşkil edecek formunun hem de eşdeğerliği sağlamak üzere izin verilecek difeomorfizmaların türünün belirlenmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada incelenen üç boyutlu manifoldlar üzerindeki otonom dinamik sistemlerin eşdeğerlik problemi de bu bakış açısıyla ele alınmıştır. Üç boyutlu bir manifold üzerindeki bir otonom dinamik sistem esas olarak bir vektör alanıyla, bir başka deyişle teğet demetinin türevlenebilir bir kesitiyle belirlenir. İlk olarak, bu dinamik sistemin denge noktalarının sonlu sayıda olduğu varsayılacaktır. Bu durumda vektör alanının desteği yine üç boyutlu bir manifold olacağından, vektör alanının manifold üzerinde sıfırı olmadığı hiç bir kısıtlama olmaksızın varsayılabilir. Bu nedenle bu çalışmada manifold üzerine herhangi bir şart koşmaksızın üzerindeki vektör alanının hiçbir yerde sıfır olmadığı kabul edilecektir. Bir manifoldun üstünde hiçbir yerde sıfır olmayan vektör alanlarının bulunması teğet demetinin Steifel-Whitney sınıflarına bağlıdır. Ancak üç boyutlu bütün manifoldların teğet demetleri aşikar olduğundan tüm üç boyutlu manifoldlarda bunun topolojik bir engeli yoktur.

Ancak bir vektör alanının hiçbir yerde sıfır olmaması dahi aşikar olmayan bir eşdeğerlik problemi tanımlamak için yeterli değildir. Çünkü bir manifold üzerindeki tüm difeomorfizmaların türev dönüşümleri hiçbir yerde sıfır olmayan bir vektör alanını yine hiçbir yerde sıfır olmayan bir vektör alanına dönüştürür. Öte yandan bir manifold üzerindeki her yerel v vektör alanını rektifiye etmek mümkün olduğundan yani $v = \frac{\partial}{\partial y^1}$ olacak şekilde bir $(y^1, ..., y^n)$ yerel koordinat sistemi var olduğundan, sıfır olmayan herhangi iki vektör alanını birbirine eşleyecek bir difeomorfizma her zaman bulunabilir. Dolayısıyla hiçbir yerde sıfır olmayan vektör alanlarının yerel eşdeğerliği problemi aşikardır. Bu nedenle aşikar olmayan bir eşdeğerlik problemi tanımlayabilmek için üç boyutlu manifoldlar üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan vektör alanlarının farklı bir özelliği kullanılacaktır.

$v(x)$ üç boyutlu bir manifold üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan bir vektör alanı olsun. Bu durumda öyle $\phi(x)$, $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ yerel fonksiyonları vardır öyleki

$$v(x) = \phi(x) \nabla H_1(x) \times \nabla H_2(x)$$

dir (Abadoğlu ve Gümral 2009). Diğer bir deyişle üç boyutlu manifoldların üzerinde yerel olarak bi-Hamiltonyen yapı mevcuttur. Bu çalışmada üç boyutlu dinamik sistemlerin yerel eşdeğerlik problemi, dinamik sistemlerin sahip olduğu bi-Hamiltonyen yapının tanımlandığı uyumlu Poisson yapılarının eşdeğerlik problemi olarak ifade edilecek ve bu problemin çözümü Cartan'ın eşdeğerlik metodu ile ele alınacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1 $M \neq \emptyset$ ikinci sayılabilir bir Hausdorff uzayı olmak üzere, her $x \in M$ noktasının $\mathbb{R}^m$'nin bir açık altkümesine homeomorfik olan bir U komşuluğu varsa M'ye m-boyutlu *topolojik manifold* denir (Chern vd 2000).

(2.1.1) tanımındaki homeomorfizma $\varphi_U : U \to \varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ ile verilirse (U, φ_U) ikilisine M'nin bir *yerel koordinat komşuluğu* ya da *yerel koordinat sistemi* denir. φ_U bir homeomorfizma olduğundan, herhangi bir $q \in U$ noktasının koordinatları $u = \varphi_U(q) \in \mathbb{R}^m$ noktasının koordinatları ile yani

$$u^i(q) = (\varphi_U(q))^i, \quad i = 1, ..., m \tag{2.1}$$

biçimde tanımlanır. Buradaki $\varphi_U(q) = (u^1(q), ..., u^m(q))$ m-lisine $q \in U$ noktasının *yerel koordinatları* denir. U üzerinde tanımlı $u^i, i = 1, ..., m$ fonksiyonlarına da *yerel koordinat fonksiyonları* denir.

(U, φ_U) ve (V, φ_V) M'nin iki koordinat komşuluğu olsun. Eğer $U \cap V \neq \emptyset$ ise o zaman $\varphi_U(U \cap V)$ ve $\varphi_V(U \cap V)$ kümeleri $\mathbb{R}^m$'nin boştan farklı iki açık altkümesidir ve

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \varphi_V(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$$

dönüşümü, tersi

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_V(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \varphi_U(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$$

olan bir homeomorfizma tanımlar ve dolayısıyla m-tane reel değerli fonksiyonla ifade edilir:

$$\begin{aligned} y^i = f^i(x^1, ..., x^m) &= (\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(x^1, ..., x^m))^i, \\ &\qquad (x^1, ..., x^m) \in \varphi_U(U \cap V); \\ x^i = g^i(y^1, ..., y^m) &= (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(y^1, ..., y^m))^i, \\ &\qquad (y^1, ..., y^m) \in \varphi_V(U \cap V). \end{aligned}$$

$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ ve $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduklarından, f^i ve g^i sürekli fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} f^i(g^1(y^1, ..., y^m), ..., g^m(y^1, ..., y^m)) = y^i, \\ g^i(f^1(x^1, ...x^m), ..., f^m(x^1, ..., x^m)) = x^i \end{aligned}$$

ile verilir.

$U \cap V = \emptyset$ iken ya da $U \cap V \neq \emptyset$ olduğu durumda f^i ve g^i fonksiyonları C^r

sınıfından ise (U, φ_U) ve (V, φ_V) koordinat komşulukları C^r-*uyumludur* denir.

Tanım 2.1.2 M, m-boyutlu topolojik manifold olmak üzere, M üzerindeki koordinat komşuluklarının bir kümesi $A = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), ...\}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A'ya M üzerinde bir C^r-*diferensiyellenebilir yapı* denir (Chern vd 2000).

1. $\{U, V, W, ...\}$ M'nin bir açık örtüsüdür.

2. A kümesinden alınan herhangi iki koordinat komuşuluğu C^r-uyumludur.

3. A maximaldir, yani bir (U, φ_U) koordinat komuşuluğu A'daki tüm koordinat komşuluklarıyla C^r-uyumlu ise o zaman $(U, \varphi_U) \in A$'dır.

Tanım 2.1.3 Üzerindeki C^r-diferensiyellenebilir yapı ile birlikte M manifolduna C^r-*diferensiyellenebilir manifold* denir. Eğer M üzerinde bir C^∞-diferensiyellenebilir yapı varsa o zaman M'ye *düzgün manifold* ya da *diferensiyellenebilir manifold* denir. M üzerindeki C^∞-diferensiyellenebilir yapıya da *diferensiyellenebilir yapı* denir (Chern vd 2000).

Tanım 2.1.4 M üzerinde verilen bir diferensiyellenebilir yapıya ait bir koordinat komşuluğuna *uyumlu koordinat komşuluğu* denir.

Örnek 2.1.5 $M = \mathbb{R}^m$, $U = M$, $\varphi_U = id$ alınırsa (U, φ_U), $\mathbb{R}^m$ için bir diferensiyellenebilir yapı belirler. Bu yapıyla birlikte $\mathbb{R}^m$ bir diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 2.1.6 M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir yapı $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ise bu yapının M'nin bir U açık altkümesi üzerine kısıtlanışı $\{U_\alpha \cap U, \varphi_{\alpha|_{U_\alpha\cap U}}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ da, U açık altkümesi üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı belirler. Bu şekilde belirlenen diferensiyellenebilir yapı ile birlikte M'nin herhangi bir U açık altkümesi de bir diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 2.1.7 $n \times n$ tipinde singüler olmayan matrislerin kümesi

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n} \mid detA \neq 0\} = \big((detA)^{-1}\{0\}\big)^c,$$

determinant fonksiyonu sürekli olduğundan $GL(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n^2}$ uzayının bir açık altkümesi ve dolayısıyla n^2-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifolddur.

Tanım 2.1.8 M ve N sırasıyla m ve n-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere bu manifoldlar üzerindeki diferensiyellenebilir yapılar $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ve $\{V_\beta, \psi_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ ile verilsin.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta & \to & \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) & \mapsto & \big(\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)\big) \end{array}$$

dönüşümü tanımlanırsa o zaman $\{(U_\alpha \times V_\beta), \varphi_\alpha \times \psi_\beta\}_{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}}$ ailesi $M \times N$ üzerinde bir differensiyellenebilir yapı belirler. Bu diferensiyellenebilir yapı ile birlikte $M \times N$ topolojik uzayına M ve N manifoldlarının *çarpım manifoldu* denir ve boyutu $m+n$ dir (Chern vd 2000).

Tanım 2.1.9 M, m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, f fonksiyonu da M üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $p \in M$ ve (U, φ_U), p noktasını içeren bir uyumlu koordinat komşuluğu olmak üzere $\varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı $f \circ \varphi_U^{-1}$ fonksiyonu C^∞ sınıfından ise f'ye $p \in M$ noktasında C^∞ sınıfındandır denir (Chern vd 2000).

Bu tanım koordinat komşuluğuna bağlı değildir. Gerçekten (V, φ_V), p noktasını içeren diğer bir uyumlu koordinat komşuluğu göz önüne alınırsa

$$f \circ \varphi_V^{-1} = (f \circ \varphi_U^{-1}) \circ (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})$$

yazılabilir. $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ diferensiyellenebilir olduğundan $f \circ \varphi_V^{-1}$ ve $f \circ \varphi_U^{-1}$ fonksiyonları aynı p noktasında diferensiyellenebilirlerdir.

$\varphi_U(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı $f \circ \varphi_U^{-1}$ fonksiyonunun yerel koordinat fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$f \circ \varphi_U^{-1}(u) = F(u^1, ..., u^m)$$

ile verilir.

Tanım 2.1.10 Eğer f fonksiyonu M üzerindeki her noktada C^∞ sınıfından ise f'ye M üzerinde *diferensiyellenebilir fonksiyon* denir.

M üzerindeki tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M)$ ile gösterilir. Toplama, çarpma ve skaler ile çarpma işlemleri ile birlikte $C^\infty(M)$ kümesi reel sayılar üzerinde bir cebir teşkil eder. M'nin herhangi bir U açık altkümesi de bir diferensiyellenebilir manifold olduğundan U açık altkümesi üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyon kavramından da söz etmek mümkündür. Bir U açık altkümesi üzerindeki tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(U)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11 M ve N sırasıyla m ve n-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M \to N$ sürekli bir fonksiyon olsun. $p \in M$ ve $f(p) \in N$ noktalarının

$$\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \to \psi_V(V)$$

fonksiyonu C^∞ sınıfından olacak şekilde uyumlu[1] koordinat komşulukları varsa f fonksiyonuna p noktasında C^∞ sınıfındandır denir. Eğer f fonksiyonu M üzerindeki her noktada C^∞ sınıfından ise $f : M \to N$ fonksiyonuna diferensiyellenebilir denir (Chern vd 2000).

Tanım 2.1.12 dim$M$ = dim$N$ olmak üzere, $f : M \to N$ fonksiyonu bir homeomorfizma ve f, f^{-1} fonksiyonları diferensiyellenebilir ise f'ye, M'den N'ye bir *difeomorfizma* de-

[1]Burada bahsi geçen uyumluluk, M ve N üzerindeki diferensiyellenebilir yapılara göredir.

nir. Eğer M ve Nmanifoldları arasında bir difeomorfizma var ise M ve N *difeomorfiktir* denir (Chern vd 2000). Her $p \in M$ noktasının $f(U) \subset N$ açık ve $f : U \to f(U)$ difeomorfizma olacak şekilde bir U komşuluğu varsa o zaman f'ye bir *yerel difeomorfizma* denir (Lee 2003). "Difeomorfik" olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Bu tez boyunca m-boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde uyumlu koordinat komşuluğu ifadesi yerine koordinat komşuluğu ya da yerel koordinat sistemi ifadeleri kullanılacaktır ve bir yerel koordinat sistemi $(U; x^1, ..., x^m)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.13 *Tanjant Uzay:*

M diferensiyellenebilir bir manifold $p \in M$ olsun. Eğer $v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa v'ye $p \in M$ noktasında bir *tanjant vektör* denir (Morita 2001).
$f, g \in C^\infty(M), a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_p(f+g) &= v_p(f) + v_p(g), \;\; v_p(af) = av_p(f) \\ v_p(fg) &= v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g). \end{aligned}$$

p noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir.

$v_p, v'_p \in T_pM$, $f \in C^\infty(M)$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(v_p + v'_p)(f) = v_p(f) + v'_p(f), \; (av_p)(f) = av_p(f)$$

toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı teşkil eder bu uzaya M'nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir (Morita 2001). p noktasındaki bir tanjant vektör için yerine göre v_p ya da X_p gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 2.1.14 *M, m-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. O zaman M'nin p noktasındaki tanjant uzayı T_pM m-boyutlu bir vektör uzayı teşkil eder. Ayrıca, $(U; x^i)$ $p \in M$ noktasını içeren bir yerel koordinat komşuluğu ise*

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_p \right\}$$

tanjant vektörlerinin kümesi T_pM için bir taban teşkil eder. Bu tabana koordinat tabanı *denir (Morita 2001).*

Bir tanjant vektör $(U; x^i)$ yerel koordinat sisteminde

$$v_p = \sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

şeklinde ifade edilir. $(U; x^i)$ ve $(V; y^i)$, $p \in M$ noktasını içeren iki yerel koordinat sistemi olsun. O zaman iki koordinat tabanı arasındaki ilişki

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

ile verilir.

Tanım 2.1.15 *Kotanjant uzay T_p^*M:*

T_pM'nin dual uzayı $T_p^*M := \{\omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ lineer}\}$ uzayına M'nin p noktasındaki *kotanjant uzayı* denir.

$$(dx^i)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \delta^i_j$$

olduğundan

$$\left\{(dx^1)_p, ..., (dx^m)_p\right\}$$

T_p^*M için bir taban teşkil eder. Bu tabana $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right\}$koordinat tabanının *dual tabanı* denir.

Tanım 2.1.16 M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ ve $h \in C^\infty(N)$ için

$$\begin{array}{rcl} f_* : T_pM & \to & T_{f(p)}N \\ X_p & \mapsto & (f_*X_p)(h) = X_p(h \circ f) \end{array}$$

biçiminde tanımlı lineer dönüşüme f dönüşümünün p noktasındaki *diferensiyeli* ya da *türev dönüşümü* ya da *ileri itme* operatörü denir (Lee 2003). f_* dönüşümü

$$(f_*X_p)(hg) = h(f(p))(f_*X_p)(g) + g(f(p))(f_*X_p)(h)$$

derivasyon özelliğini sağlar. $(U; x^i)$ ve $(V; y^j)$ sırasıyla $p \in M$ ve $f(p) = q \in N$ noktalarını içine alan yerel koordinat sistemleri olmak üzere $f = (f^1, ..., f^n)$ dönüşümünün türev dönüşümü f_*'ın yerel koordinatlardaki ifadesi

$$f_*\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p, \quad y^j = f^j(x^1, ..., x^m)$$

olarak ifade edilir. $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\right)$ matrisine f'nin p noktasındaki Jacobian matrisi denir.

Tanım 2.1.17 M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun.

$$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$$

dönüşümünün dualine yani $\forall\omega \in T^*_{f(p)}N,\ X_p \in T_pM$ için

$$\begin{array}{rcl} f^* : T^*_{f(p)}N & \to & T^*_pM \\ \omega & \mapsto & (f^*\omega)(X_p) = \omega(f_*(X_p)), \end{array}$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşüme f dönüşümünün p noktasındaki *geri-çekme* dönüşümü denir.

2.2. Vektör Demetleri

Tanım 2.2.1 E ve M diferensiyellenebilir manifoldlar, $\pi : E \to M$ diferensiyellenebilir örten bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $\xi = (E, \pi, M)$ üçlüsüne M üzerinde n-boyutlu bir *vektör demeti* denir (Morita 2001):

1. Her $p \in M$ noktası için $E_p := \pi^{-1}(p)$ kümesi üzerinde n-boyutlu reel vektör uzayı yapısı vardır.

2. (Yerel aşikarlık): Her $p \in M$ noktası için öyle $U \subset M$ açık altkümesi ve öyle $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ difeomorfizması vardır öyleki φ_U'nun her $q \in U$ noktası için $\pi^{-1}(q)$ kümesine kısıtlanışı $\varphi_{U_{|\pi^{-1}(q)}} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$ bir lineer izomorfizmadır.

Burada E *yekun* ya da *toplam uzay*, M taban uzayı, π demet izdüşümü ya da sadece izdüşüm, $E_p = \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{R}^n$ kümesi de E'nin $p \in M$ noktası üzerindeki *lifi* olarak adlandırılır. Bir vektör demeti için, yerine göre, $\xi = (E, \pi, M)$, $\pi : E \to M$, E ya da π gösterimleri kullanılacaktır. $U \subset M$ açık altkümesi için yerel aşikarlık özelliğini sağlayan $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ difeomorfizmasına U üzerinde bir *aşikarlaştırma* denir. $(\pi^{-1}(U), \varphi_U)$, E'nin bir yerel koordinat sistemini ifade eder. $(U; x^1, ..., x^m)$ M'nin bir yerel koordinat sistemi olmak üzere

$$(x^i, v^j)$$

E üzerinde bir yerel koordinat sistemi tanımlar. Burada $(x^1, ..., x^m)$ koordinatlarına *taban* koordinatları, $(v^1, ..., v^n)$ koordinatlarına da *lif koordinatları* denir. Lif koordinatları taban manifoldunda seçilen yerel koordinat komşuluğuna bağlı değildir.

U_α ve U_β M'nin iki açık altkümesi, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ ve $\varphi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \cong U_\beta \times \mathbb{R}^n$ sırasıyla bu kümeler için aşikarlaştırmalar olsun. O zaman

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

bileşke fonksiyonu

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v), \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $g_{\alpha\beta} : p \in U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n, \mathbb{R})$ diferensiyellenebilir fonksiyonları iki aşikarlaştırmanın $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ üzerindeki ilişkilerini ifade eder. Bu fonksiyonlara *geçiş fonksiyonları* denir. U_γ açık altkümesi üzerinde bir başka aşikarlaştırma φ_γ alınırsa $g_{\beta\gamma}$ ve $g_{\alpha\gamma}$ geçiş fonksiyonları elde edilir ve bu fonksiyonlar $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ için

$$g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$$

eşdöngü (cocycle) özelliğini sağlar. Diğer taraftan, M'nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ve eşdöngü özelliğini sağlayan $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta\in\mathcal{A}}$ fonksiyon ailesi verildiğinde $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ kümeleri uç uca eklenerek bir vektör demeti inşa edilebilir. (Steenrod 1999), (Morita 2001), (Chern vd 2000).

Tanım 2.2.2 $\pi : E \to M$ bir vektör demeti olsun.

$$\pi \circ s = id : M \to M$$

olacak şekilde diferensiyellenebilir $s : M \to E$ dönüşümüne E vektör demetinin bir *kesiti* denir. Diğer bir ifade ile kesit, M'nin her p noktasına E_p'nin bir $s(p)$ elemanını karşılık getiren diferensiyellenebilir bir dönüşümdür(Morita 2001). Her $p \in M$ için $s(p) = 0$ ise s'ye *sıfır kesit*, $s(p) \neq 0$ ise *sıfır-olmayan kesit* denir. Eğer s fonksiyonu M'nin bir U açık altkümesinde tanımlı ise o zaman s'ye *yerel kesit* denir.

Kesit tanımı vasıtası ile bir vektör demetinin yerel aşikarlaştırmasını daha iyi anlamak mümkündür. Örneğin, bir U açık altkümesi üzerinde bir $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ aşikarlaştırması tanımlamak ile U kümesine ait her p noktasında $\{s_1(p), ..., s_n(p)\}$ kümesi E_p için bir taban olacak şekilde $s_i : U \to E,\ i = 1, ..., n$ kesitlerini belirlemek aynı anlama gelir. Bu şekilde belirlenen s_i kesitlerine U üzerinde bir *çatı alanı* denir. Vektör demeti E'nin tüm kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$ ile gösterilsin. Vektör demetinin lifleri üzerinde bir vektör uzayı yapısı olduğundan, noktasal olarak $\Gamma(E)$ üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri tanımlanabilir. $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ ve $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere her $p \in M$ için

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(p) &= s_1(p) + s_2(p),\\ (fs)(p) &= f(p).s(p)\end{aligned}$$

tanımlanırsa o zaman $s_1 + s_2$ ve fs fonksiyonları da vektör demeti E'nin yerel kesitleri olurlar ve dolayısıyla $\Gamma(E)$ yukarıdaki şekilde tanımlanan işlemlere göre bir $C^\infty(M)$-modül ve bir reel vektör uzayı teşkil eder (Morita 2001), (Chern vd 2000).

Örnek 2.2.3 *Aşikar Demet:*

$E = M \times \mathbb{R}^n$ çarpım manifoldu M üzerinde bir vektör demetidir. Bu demete *aşikar demet* ya da *çarpım demeti* denir.

Örnek 2.2.4 *Teğet Demeti TM:*

M, m-boyutlu bir manifold olmak üzere her $p \in M$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerinin kümesi

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{(p, X) : p \in M, X \in T_pM\}$$

$2m$-boyutlu bir manifolddur (Chern vd 2000), (Lee 2003). Ayrıca TM lifleri $T_pM \simeq \mathbb{R}^m$ olan bir vektör demetidir.

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \to & M \\ (p, X_p) & \mapsto & \pi(p, X_p) = p \end{array}$$

doğal izdüşüm olmak üzere p noktası üzerindeki lif $\pi^{-1}(p) = T_pM$ dir. $(U; x^1, ..., x^m)$ yerel koordinat sisteminde verilen bir tanjant vektör $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ olmak üzere TM üzerinde yerel koordinat sistemi

$$\begin{array}{rcl} \varphi_U : \pi^{-1}(U) & \to & U \times \mathbb{R}^m \\ (p, X_p) & \mapsto & (x^1(p), ..., x^m(p); X^1, ..., X^m) \end{array}$$

yerel aşikarlaştırması ile tanımlanır.

Tanım 2.2.5 TM'nin bir kesitine M üzerinde bir *diferensiyellenebilir vektör alanı* denir (Lee 2003). $(U; x^i)$, M'nin bir yerel koordinat sistemi olmak üzere, diferensiyellenebilir bir vektör alanı yerel olarak

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X^i \in C^\infty(U)$$

şeklinde ifade edilir.

M üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ ile gösterilir ve yukarıda bahsedildiği gibi $\mathfrak{X}(M)$ kümesi $C^\infty(M)$ üzerinde bir modül ve $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.6 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

ifadesine f fonksiyonun X vektör alanı doğrultusundaki *yöne göre türevi* ya da *Lie türevi* denir (Lee 2003).

Örnek 2.2.7 *Dual demet ve Kotanjant demeti T^*M:*

$\pi : E \to M$ bir reel vektör demeti olsun.

$$E^* = \bigcup_{p \in M} E_p^*$$

kümesi de M üzerinde bir vektör demetidir. Burada E_p^*, E_p uzayının dual uzayıdır yani $E_p^* = Hom(E_p, \mathbb{R})$ dir. Bu şekilde oluşturulan vektör demetine E'nin *dual demeti* denir. $U \subset M$ kümesine ait her p noktasında $\{s_1^*(p), ..., s_n^*(p)\}$ kümesi E_p^* için bir taban olacak şekilde $s_i^* : U \to E,\ i = 1, ..., n$ kesitlerine U üzerinde bir *eşçatı alanı* denir.

T_pM'nin dual uzayı

$$T_p^*M = \{\omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ lineer}\}$$

göz önüne alınırsa

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

dual demetine M manifoldunun *kotanjant demeti* denir.

$$\begin{aligned} \pi : T^*M &\to M \\ (p, \alpha) &\mapsto \pi(p, \alpha) = p \end{aligned}$$

doğal izdüşüm olmak üzere p noktası üzerindeki lif $\pi^{-1}(p) = T_p^*M$ dir. $(U; x^1, ..., x^m)$ yerel koordinat sisteminde verilen bir kotanjant vektör $\alpha = \alpha_i dx_p^i \in T_pM$ olmak üzere T^*M üzerindeki yerel koordinat sistemi

$$\begin{aligned} \varphi_U : \pi^{-1}(U) &\to U \times \mathbb{R}^m \\ (p, X) &\mapsto (x^1(p), ..., x^m(p); \alpha_1, ..., \alpha_m) \end{aligned}$$

aşikarlaştırması ile tanımlanır.

Tanım 2.2.8 T^*M'nin bir kesitine M üzerinde bir *diferensiyellenebilir kotanjant vektör alanı* ya da *1-form* denir. $(U; x^i)$, M'nin bir yerel koordinat sistemi olmak üzere, bir diferensiyellenebilir 1-form

$$\alpha = \alpha_i dx^i, \ \ \alpha_i \in C^\infty(U)$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2.9 *Vektör Demetlerinin Whitney (Direk) Toplamı:*

$\pi_1 : E_1 \to M$ ve $\pi_2 : E_2 \to M$ aynı M manifoldu üzerinde iki vektör demeti olsun. O zaman

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}$$

kümesi

$$\pi : E_1 \oplus E_2 \ni (v_1, v_2) \mapsto \pi_1(v_1)$$

izdüşümü ile birlikte her $p \in M$ için lifleri $E_{1p} \oplus E_{2p}$ olan bir vektör demeti teşkil eder. Bu demete E_1 ve E_2 demetlerinin direk toplamı denir ve $E_1 \oplus E_2$ ile gösterilir (Morita 2001).

Örnek 2.2.10 *Vektör Demetlerinin Tensör Çarpımı*

$\pi_1 : E_1 \to M$ ve $\pi_2 : E_2 \to M$ aynı M manifoldu üzerinde iki vektör demeti olsun. O zaman

$$E_1 \otimes E_2 := \bigcup_{p \in M} p_1^{-1}(p) \otimes p_2^{-1}(p)$$

kümesi

$$\pi : E_1 \otimes E_2 \ni p_1^{-1}(p) \otimes p_2^{-1}(p) \mapsto p$$

izdüşümü ile birlikte her $p \in M$ için lifleri $E_{1p} \otimes E_{2p}$ olan bir vektör demeti teşkil eder. Bu demete E_1 ve E_2 demetlerinin tensör çarpımı denir ve $E_1 \otimes E_2$ ile gösterilir. M üzerinde (r, s) tipinde bir tensör, r tane tanjant demetle s tane kotanjant demetin tensör çarpım demetinde bir kesiti olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda vektör demetlerinin anti-simetrik (dış çarpım) ve simetrik tensör çarpımları da tanımlanabilir. M üzerindeki anti-simetrik p-formların demeti $\Lambda^p T^* M$ ve anti-simetrik p-vektörlerin(multi-vektör) demeti $\Lambda^p TM$ ile gösterilecektir. M üzerinde bir p-form ve p-vektör sırasıyla $\Lambda^p T^* M$ ve $\Lambda^p TM$'nin kesitleri olarak ifade edilir (Chern vd 2000).

2.3. Lie Grupları ve Lie Cebirleri

Tanım 2.3.1 G boştan farklı bir küme olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa G'ye r-boyutlu bir *Lie grubu* denir (Chern vd 2000).

1. $(G, .)$ bir gruptur.
2. G, r-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur.
3.

$$\begin{aligned} \tau : G &\to G \\ g &\mapsto \tau(g) = g^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi : G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto \varphi(g_1, g_2) = g_1 . g_2 \end{aligned}$$

dönüşümleri diferensiyellenebilirdir.

$\tau^2 = id$ olduğundan $\tau : G \to G$ bir difeomorfizmadır. Ayrıca, G üzerinde

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ x &\mapsto x.g \end{aligned} \qquad \begin{aligned} L_g : G &\to G \\ x &\mapsto g.x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı difeomorfizmalara sırasıyla *sağ* ve *sol ötemele* dönüşümleri denir ve bu dönüşümler aşağıdaki özelliği sağlar:

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, \ \ ve \ \ (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$$

Örnek 2.3.2 *Genel Lineer Grup GL*$(n, \mathbb{R})$

$n \times n$ tipinde singüler olmayan matrislerin kümesi

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n} \mid detA \neq 0\}$$

matris çarpımına göre bir grup teşkil eder. *Determinant* fonksiyonu sürekli olduğundan

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left((detA)^{-1}\{0\}\right)^c$$

$\mathbb{R}^{n^2}$ uzayının bir açık altkümesi ve dolayısıyla n^2-boyutlu bir manifolddur.
$A = \left(A_i^j\right), B = \left(B_i^j\right) \in GL(n, \mathbb{R})$ matrislerinin çarpımı

$$(A.B)_i^j = A_i^k B_k^j$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eşitliğin sağ tarafı matris elemanlarının bir polinomu olduğundan $\varphi(A, B) = A.B$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Benzer gerekçeyle

$$\tau(A) = A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$$

dönüşümü de diferensiyellenebilir olduğundan $GL(n, \mathbb{R})$, n^2-boyutlu bir Lie gruptur.

Bir Lie grubunun her kapalı altgrubu da bir Lie grubu olduğundan $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ ve $SL(n, \mathbb{R})$ grupları da birer Lie grubudur.

Tanım 2.3.3 V, n-boyutlu reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ "çarpma" ikili işlemi varsa V'ye n-boyutlu *Lie cebiri* denir (Chern vd 2000). $X, Y, Z \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

1.$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (Dağılma özelliği)

2.$[X, Y] = -[Y, X]$ (Anti-simetri özelliği)

3.$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

Örnek olarak, 3-boyutlu Öklid uzayı vektörel çarpım işlemi ile birlikte 3-boyutlu bir Lie cebiridir. Bir manifold üzerindeki tüm vektör alanlarının uzayı $\mathfrak{X}(M)$, $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ işlemi ile birlikte sonsuz boyutlu bir Lie cebiridir.

Tanım 2.3.4 G, r-boyutlu bir Lie grubu ve e, G'nin birim elemanı olsun. Her $a \in G$ için $R_{a^{-1}} : G \to G$ bir difeomorfizma olduğundan $R_{a^{-1}}$ dönüşümünün türev dönüşümü

$(R_{a^{-1}})_* : T_aG \to T_eG$ bir lineer izomorfizmadır. $X \in T_aG$ için

$$\omega(X_a) = (R_{a^{-1}})_* X_a$$

şeklinde tanımlı T_eG değerli diferensiyel 1-forma *sağ invaryant Maurer-Cartan form* denir (Chern vd 2000).

$\delta_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, T_eG için bir taban olmak üzere, sağ invaryant Maurer-Cartan form

$$\omega = \omega^i \otimes \delta_i \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\omega^i,\ 1 \leqslant i \leqslant r$ formları tüm G üzerinde tanımlı lineer bağımsız diferensiyel 1-formlardır.

Teorem 2.3.5 *$\sigma : G \to G$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. σ'nın G grubunun bir sağ ötelemesi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\sigma^*\omega^i = \omega^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

olmasıdır (Chern vd 2000).

$c \in G$, $X_a \in T_aG$ olsun.

$$\begin{aligned} \left((R_c)^* \omega\right)(X_a) &= \omega\left((R_c)_* X_a\right) \\ &= \left(R_{(ac)^{-1}}\right)_* \circ (R_c)_* X_a = (R_{a^{-1}})_* X_a = \omega(X) \end{aligned}$$

olduğundan G üzerinde sağ invaryant Maurer-Cartan form tanımı

$$(R_a)^* \omega = \omega$$

ile verilebilir. Teorem (2.3.5)'e göre ω^i diferensiyel 1-formları sağ invaryant olduğundan

$$\omega^i|_a = R^*_{a^{-1}}(\omega^i|_e)$$

yazılır. ω^i diferensiyel 1-formları G grubu üzerinde global olarak tanımlıdır. Gerçekten

$$R^*_c(\omega^i|_{ac}) = R^*_c \circ R^*_{(ac)^{-1}}(\omega^i|_e) = R^*_c \circ R^*_{c^{-1}} \circ R^*_{a^{-1}}(\omega^i|_e) = \omega^i|_a$$

dir. Yani ω^i formlarının G üzerindeki aldığı değerleri belirlemek için bir noktada aldığı değere bakmak yeterlidir. $d \circ R^* = R^* \circ d$ olduğundan

$$d\omega^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \ \ C^i_{jk} = -C^i_{kj}$$

2-formu da sağ invaryanttır.

$$R_c^*(d\omega^i|_{ac}) = d\omega^i|_a$$

olduğundan $C^i_{jk}(ac) = C^i_{jk}(a)$ elde edilir. $c = a^{-1}$ alınırsa $C^i_{jk}(e) = C^i_{jk}(a)$ yazılır. Bu eşitlik her $a \in G$ için geçerli olduğunda C^i_{jk} fonksiyonları sabittir. C^i_{jk} sabitlerine Lie grubu G'nin *yapı sabitleri*

$$d\omega^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad C^i_{jk} = -C^i_{kj}$$

denklemlerine de Lie grubu G'nin *yapı denklemleri* ya da *Maurer-Cartan denklemleri* denir.

Tanım 2.3.6 X, G Lie grubu üzerinde diferensiyellenebilir bir (tanjant) vektör alanı olsun. $\forall a \in G$ için

$$(R_a)_* X = X$$

ise X vektör alanına G üzerinde *sağ invaryant vektör alanı* denir (Chern vd 2000). G üzerindeki tüm sağ invaryant vektör alanlarının vektör uzayı $\mathfrak{g}$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.7 *X, Y vektör alanları G üzerinde sağ invaryant vektör alanları olsun. O zaman $[X, Y]$ vektör alanı da G üzerinde sağ invaryanttır(Chern vd 2000).*

Dolayısıyla G üzerindeki tüm sağ invaryant vektör alanlarının uzayı $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiridir. Bu cebire, Lie grubu G'nin Lie cebiri denir (Chern vd 2000).

Teorem 2.3.8 *Chern vd (2000)*

$$\mathfrak{g} \simeq T_eG.$$

G grubunun birim elemanı e olmak üzere $X_e \in T_eG$ elemanı için

$$X_a = (R_a)_* X_e \in T_aG$$

tanımlansın. Bu şekilde her noktaya bir tanjant vektörü karşılık getiren bir X fonksiyonu yani bir vektör alanı elde edilir. ω Maurer-Cartan formunun bu vektör alanı üzerindeki değeri

$$\omega(X) = (R_{a^{-1}})_* X = (R_{a^{-1}})_* (R_a)_* X_e = X_e \tag{2.3}$$

dir. δ_i, G üzerinde bir koordinat tabanı olmak üzere $\mathfrak{g}$ için $X_i = (R_a)_* \delta_i$ şeklinde tanımlı yani, $\delta_i \in T_eG$ elemanlarının sağ ötelenmesiyle elde edilmiş sağ invaryant vektör alanlarından oluşan bir taban seçilirse (2.3) ifadesinden

$$\omega(X_i) = \delta_i$$

yazılır. Öte yandan (2.2) ifadesine göre

$$\omega(X_j) = \omega^i(X_j)\delta_i$$

dir. Bu iki eşitlik bir araya getirilirse

$$\omega^i(X_j) = \delta^i_j$$

elde edilir. Dolayısıyla sağ invaryant ω^i diferensiyel 1-formları $\mathfrak{g}^*$ için bir taban teşkil eder. Bu tabana G üzerinde sağ invaryant Maurer-Cartan formlarının tabanı denir.

$GL(n, \mathbb{R})$ matris Lie grubu üzerinde sağ invaryant Maurer-Cartan form

$$\omega = dg.g^{-1}, \;\; \omega^i_j = dg^i_k(g^{-1})^k_j, \;\; g \in G \tag{2.4}$$

ile ifade edilir. Herhangi sabitlenmiş bir $h \in G$ için

$$(R_h)^*\,\omega = d(g.h)(g.h)^{-1} = dg.g^{-1} = \omega$$

sağ invaryant olma şartı sağlanır. ω matrisinin içerikleri olan ω^i_j formları sağ invaryant Maurer-Cartan formlarının tabanıdır.

2.4. Vektör Demetleri Üzerinde Konneksiyon

Tanım 2.4.1 E bir vektör demeti olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

dönüşümüne E üzerinde bir *konneksiyon* denir (Chern vd 2000).

1. $\forall s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ için

$$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2.$$

2. $s \in \Gamma(E)$ ve herhangi $f \in C^\infty(M)$ için

$$D(fs) = df \otimes s + fDs.$$

X, M üzerinde (tanjant) vektör alanı ve $s \in \Gamma(E)$ olsun.

$$D_X s =< X, Ds >:= Ds(X) \in \Gamma(E)$$

ifadesine s kesitinin X vektör alanı boyunca *kovaryant türevi* denir.

$\alpha = -1$ için $D(-s) = -Ds$ eşitliği sağlandığından D sıfır kesiti sıfır kesite gönderir. Yani D, $\Gamma(E)$ uzayından $\Gamma(T^*M \otimes E)$ uzayına bir lineer dönüşümdür. Tanım gereği vektör demeti üzerinde tanımlanan bir konneksiyon, vektör değerli bir diferensiyel 1-formla ile ifade edilebilir. $(U; u^1, ..., u^m)$ M üzerinde bir yerel koordinat sistemi olsun. U üzerinde her yerde lineer bağımsız olacak şekilde $s_\alpha \in \Gamma(E), 1 \leq \alpha \leq q$ kesitleri yani U üzerinde bir *yerel çatı alanı* seçilsin. O zaman her $p \in U$ noktasında

$$\{du^i \otimes s_\alpha, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq q\}$$

kümesi $T_p^*M \otimes E_p$ uzayı için bir taban teşkil eder. Ds_α, U üzaerinde $T^*M \otimes E$ demetinin bir kesiti olduğundan

$$Ds_\alpha = \sum_{i,\beta} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du^i \otimes s_\beta \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\Gamma_{\alpha i}^{\beta}$ fonksiyonları U üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du^i$$

tanımlanırsa o zaman (2.5) ifadesi

$$Ds_\alpha = \sum_{\beta} \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta \tag{2.6}$$

halini alır. Matris notasyonu

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_q \end{pmatrix}, \\ \varpi &= \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \dots & \omega_1^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_q^1 & \dots & \omega_q^q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kullanılarak (2.6) eşitliği

$$DS = \varpi \otimes S$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki ϖ matrisine *konneksiyon formu* ya da *konneksiyon matrisi* denir (Chern vd 2000) ve bu konneksiyon formu seçilen koordinat çatısına bağlıdır.

$S' =^t (s_1', ..., s_q')$ U üzerinde bir diğer yerel çatı olsun. S ve S' çatıları arasındaki ilişki

$$S' = AS \tag{2.7}$$

ile verilir. Burada A matrisi $q \times q$ tipinde singüler olmayan bir matristir. ϖ' konneksiyon formu D'nin S' çatısındaki ifadesi olmak üzere (2.7) ifadesinin her iki tarafına D operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} DS' &= dA \otimes S + A.DS \\ &= (dA + A.\varpi) \otimes S \\ &= (dA.A^{-1} + A.\varpi.A^{-1}) \otimes S' \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ϖ ve ϖ' konneksiyon formlarının çatı alanlarının değişimi altındaki dönüşüm kuralı

$$\varpi' = dA.A^{-1} + A.\varpi.A^{-1} \tag{2.8}$$

ile verilir. Diğer taraftan, vektör demeti E üzerinde (2.8) dönüşüm kuralına sahip bir konnksiyon vardır (Chern vd 2000).

Teorem 2.4.2 *Bir vektör demeti üzerinde her zaman bir konneksiyon tanımlanabilir (Chern vd 2000).*

Örnek 2.4.3 *TM üzerinde konneksiyon: M üzerinde Afin konneksiyon.*

$(U; u^i)$, M üzerinde bir yerel koordinat komşuluğu olsun. $s_i = \partial/\partial u^i \in \Gamma(TM)$, $1 \leq i \leq m$ koordinat çatısı göz önüne alınsın. $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j du^k$ diferensiyel 1-formları TM vektör demeti üzerinde

$$Ds_i = \Gamma_{ik}^j du^k \otimes s_j$$

şeklinde tanımlı bir konneksiyon tanımlar. Gerçekten $(W; w^i)$ bir diğer koordinat komşuluğu ve ω'nın bu koordinatlardaki ifadesi $\omega_i'^j = \Gamma_{ik}'^j dw^k$ olmak üzere $U \cap W \neq \emptyset$ üzerinde Γ_{ik}^j fonksiyonlarının dönüşüm kuralı (2.8) eşitliğinden

$$\Gamma_{ik}'^j = \Gamma_{qr}^p \frac{\partial w^j}{\partial u^q} \frac{\partial u^p}{\partial w^i} \frac{\partial u^r}{\partial w^k} + \frac{\partial^2 u^p}{\partial w^i \partial w^k} \frac{\partial w^j}{\partial u^p}$$

ile ifade edilir. Bu şekilde tanımlı

$$Ds_i = \Gamma_{ik}^j du^k \otimes s_j$$

konneksiyonuna M üzerinde *afin konneksiyon* denir.

$$T_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j$$

ve

$$R_{ikl}^j = \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j$$

tensörlerine sırasıyla D konneksiyonunun *torsiyon* ve *eğrilik* tensörleri denir.

(2.8) ifadesinde her iki tarafın dış türevi alınırsa

$$d\varpi'.A - \varpi' \wedge dA = dA \wedge \varpi + A.d\varpi$$

elde edilir. Burada kullanılan matrisler arasındaki dış çarpımdan kasıt matris çarpımı yapılırken matris elemanlarının dış çarpımlarının alınmasıdır. $dA = \varpi'.A - A.\varpi$ kullanılırsa

$$(d\varpi' - \varpi' \wedge \varpi').A = A.(d\varpi - \varpi \wedge \varpi)$$

elde edilir.

Tanım 2.4.4 $\Omega = d\varpi - \varpi \wedge \varpi$ ifadesine D konneksiyonunun U üzerindeki eğrilik matrisi denir (Chern vd 2000).

Teorem 2.4.5 *Eğrilik matrisi aşağıdaki Bianchi özdeşliğini sağlar (Chern vd 2000):*

$$d\Omega = \varpi \wedge \Omega - \Omega \wedge \varpi$$

2.5. Çatı Demetleri ve Çatı Demetleri Üzerinde Konneksiyon

M, m-boyutlu bir manifold olsun. $(e_1, ..., e_m)$, $p \in M$ noktasında lineer bağımsız tanjant vektörler olmak üzere $(p; e_1, ..., e_m)$ ifadesine M üzerinde bir *çatı* denir(Chern vd 2000). M üzerindeki tüm çatıların kümesi P ile gösterilsin. P üzerinde, P'yi diferensiyellenebilir bir manifold haline getirecek bir diferensiyellenebilir yapı

$$\begin{gathered} \pi : P \to M \\ \pi(p; e_1, ..., e_m) = p \end{gathered}$$

izdüşümü diferensiyellenebilir, örten bir dönüşüm olacak şekilde şu şekilde oluşturulur:

$(U; u^i)$, M'nin bir koordinat komşuluğu ve $p \in U$ olsun. $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ koordinat vektör alanlarından oluşan $(\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^m})$ koordinat çatı alanı göz önüne alınsın. Dolayısıyla herhangi $(p; e_1, ..., e_m)$ çatısı U üzerinde

$$e_i = a_i^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)_p$$

ile ifade edilir. Burada (a_i^k), $m \times m$ tipinde singüler olmayan bir matris yani $(a_i^k) \in GL(m, \mathbb{R})$ dir. Herhangi $p \in U$ ve $(a_i^k) \in GL(m, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \varphi_U &: U \times GL(m, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U) \\ \varphi_U(p, a_i^k) &= (p; e_1, ..., e_m) \end{aligned} \tag{2.9}$$

dönüşümü (yerel aşikarlaştırması) 1-1 bir dönüşümdür.

M'nin $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ koordinat komşuluklarından oluşan bir açık örtüsü ve bunlara karşılık gelen (2.9)'daki gibi tanımlanmış $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ dönüşümleri göz önüne alınsın öyleki, $U\times GL(m,\mathbb{R})$ topolojik manifoldunun her açık altkümesinin φ_U dönüşümü altındaki görüntüsü P için bir topoloji tabanı olsun. P üzerinde bu şekilde oluşturulan topolojik yapıya göre

$$\varphi_U : U \times GL(m,\mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$$

dönüşümü bir homeomorfizmadır. φ_U dönüşümü vasıtası ile $(\pi^{-1}(U),\varphi_U)$, P üzerinde bir koordinat komşuluğu tanımlar. Yani P üzerinde bir $x\in\pi^{-1}(U)$ noktasının koordinatları

$$(u^i, a^i_j)$$

m^2+m tane fonksiyonla ifade edilir. $(U;u^i)$, (W,w^i) M üzerinde iki koordinat komşuluğu olmak üzere $U\cap W$ üzerinde

$$w^i = w^i(u^1,...,u^m)$$

koordinat dönüşümü göz önüne alınsın. $\frac{\partial}{\partial u^i}$, $\frac{\partial}{\partial w^i}$ koordinat vektör alanları arasındaki ilişki

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial w^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial w^j} \tag{2.10}$$

olduğundan $p\in U\cap W$ ve $(p;e_1,...,e_m)$ $U\cap W$ üzerinde bir çatı olmak üzere, P'nin $\left(\pi^{-1}(U);u^i,a^i_j\right)$ ve $\left(\pi^{-1}(W);w^i,b^i_j\right)$ iki koordinat komşuluğu için $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(W)$ üzerinde koordinat dönüşüm kuralı

$$\begin{aligned} w^i &= w^i(u^1,...,u^m)\\ b^i_j &= a^i_k\frac{\partial w^k}{\partial u^j}\end{aligned}$$

ile ifade edilir. w^i ve b^i_j fonksiyonları C^∞-sınıfından olduklarından $\pi^{-1}(U)$ ve $\pi^{-1}(W)$ koordinat komşulukları C^∞ uyumludur. Bu şekilde oluşturulan diferensiyellenebilir yapı ile bilrlikte M manifoldu üzerindeki tüm çatıların kümesi P, m^2+m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold halini alır ve (P,M,π) üçlüsüne M üzerinde bir *çatı demeti* denir (Chern vd 2000). Diferensiyellenebilir $\frac{\partial w^k}{\partial u^j}$ fonksiyonlarına da çatı demetinin geçiş fonksiyonları denir. Genel itibariyle, M üzerinde global olarak tanımlı bir çatı alanı olmak zorunda değildir (Manifold parallelleştirilebilir olmayabilir). Fakat M üzerinde bir afin konneksiyon her zaman tanımlı olduğundan, P üzerinde global olarak tanımlı bir çatı alanı tanımlamak mümkündür. Bu anlamda manifold olarak P, M'ye göre daha basittir denilebilir.

$GL(m, \mathbb{R})$ grubu P çatı demeti üzerinde

$$\begin{aligned} L_a(p; e_1, ..., e_m) &= (p; e'_1, ..., e'_m) \\ e'_i &= a^j_i e_j \end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde etki ettiğinden $GL(m, \mathbb{R})$ grubuna P'nin homeomorfizmalar grubu gözü ile bakılabilir. $\forall a \in GL(m, \mathbb{R})$ için $L_a : P \to P$ lifleri koruyan bir homeomorfizmadır, yani

$$\pi \circ L_a = \pi : P \to M$$

dir. L_a dönüşümüne $a \in GL(m, \mathbb{R})$ elemanının P üzerindeki sol ötelemesi denir ve $a, b \in GL(m, \mathbb{R})$ için

$$L_{ab} = L_a \circ L_b$$

özelliği vardır. (2.10) ifadesinden

$$dw^i = \frac{\partial w^i}{\partial u^j} du^j$$

yazılırsa (2.11) dönüşüm kuralına göre

$$b^i_j du^j = a^i_k \frac{\partial w^k}{\partial u^j} du^j = a^i_k dw^k$$

elde edilir. Dolayısıyla $\theta^i = b^i_j du^j$ differensiyel 1-formu iyi tanımlı yani koordinat sisteminden bağımsızdır.

P üzerinde

$$\theta^i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{2.12}$$

Pfaffian sistemi P üzerindeki her p noktasında T_pP uzayının m^2-boyutlu bir altuzayını tanımlar. Bu altuzaya *dikey(vertial) uzay* denir.

$$du^i = \left(b^{-1}\right)^i_j \theta^j$$

olduğundan (2.12) denklem sistemi $du^i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m$ ile ifade edilebilir ve dolayısıyla her $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğu için (2.12) sistemi integre edilebilirdir. (2.12) sisteminin maximal integral manifoldu

$$u^i = sbt, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

olarak elde edilir. $u^i = sbt$, $p \in M$ için $\pi^{-1}(p)$ lifine karşılık geldiğinden dikey uzay $\pi^{-1}(p)$ liflerinin tanjant uzayıdır.

D, M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i du^k$, D'nin $(U; u^i)$ yerel koordinat sistemindeki konneksiyon matrisi olsun. O zaman

$$e_i = a_i^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant m$$

vektör alanının kovaryant türevi

$$De_i = \left(da_i^k + a_i^j \omega_i^k\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^k}$$

dir. Dolayısıyla

$$Da_i^k \equiv da_i^k + a_i^j \omega_i^k$$

$\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğu üzerinde bir diferensiyel 1-form belirler. (W, w^i), M'nin bir diğer yerel koordinat sistemi olmak üzere $U \cap W$ üzerinde

$$b_j^i = a_k^i \frac{\partial w^k}{\partial u^j}$$

olduğundan

$$db_i^k + b_i^j {\omega'}_i^k = \left(da_i^j + a_i^l \omega_l^j\right) \frac{\partial w^k}{\partial u^j}$$

ya da

$$Db_i^k = Da_i^j \frac{\partial w^k}{\partial u^j}$$

elde edilir.

$$(a^{-1})_i^j = \frac{\partial w^k}{\partial u^i} (b^{-1})_k^j$$

olduğundan

$$(b^{-1})_k^j Db_i^k = (a^{-1})_i^j Da_i^k$$

yazılır ve sonuç olarak

$$\theta_i^j = (a^{-1})_i^j Da_i^k = (a^{-1})_i^j (da_i^k + a_i^l \omega_l^k) \tag{2.13}$$

diferensiyel 1-formu seçilen yerel koordinat sisteminde bağımsızdır ve P üzerinde bir diferensiyel 1-form tanımlar.

$$\begin{aligned} du^i &= a_j^i \theta^j \\ da_i^j &= -a_i^k \omega_k^j + a_k^j \theta_i^k \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınsın. İlk eşitliğin dış türevi alınır ve (2.14) kullanılırsa

$$0 = (-a^k_j \omega^i_k + a^i_k \theta^k_j) \wedge \theta^j + a^i_j d\theta^j$$

elde edilir. M üzerinde $\omega^i_k = \Gamma^i_{kr} du^r = \Gamma^i_{kr} a^r_l \theta^l$ olduğundan

$$0 = (-a^k_j \Gamma^i_{kr} a^r_l \theta^l + a^i_s \theta^s_j) \wedge \theta^j + a^i_s d\theta^s$$

ya da

$$a^i_s \left(d\theta^s - \theta^j \wedge \theta^s_j \right) = a^k_j \Gamma^i_{kr} a^r_l \theta^l \wedge \theta^j$$

elde edilir. Her iki taraf $(a^{-1})^s_m$ ile çarpılırsa

$$\delta^i_m \left(d\theta^s - \theta^j \wedge \theta^s_j \right) = (a^{-1})^s_m a^k_j \Gamma^i_{kr} a^r_l \theta^l \wedge \theta^j$$

ya da

$$d\theta^s - \theta^j \wedge \theta^s_j = (a^{-1})^s_i a^k_j \Gamma^i_{kr} a^r_l \theta^l \wedge \theta^j$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitliğin sağ tarafında k ve r indeksleri anti-simetrize edilir ve torsiyon tensörünün tanımı göz önüne alınırsa

$$d\theta^s - \theta^l \wedge \theta^s_l = \frac{1}{2} P^s_{lj} \theta^l \wedge \theta^j$$

eşitliği elde edilir. Burada P^s_{lj} torsiyon tensörü cinsinden

$$P^s_{lj} = \frac{1}{2} (a^{-1})^s_i a^k_j a^r_l T^i_{kr}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $da^j_i = -a^k_i \omega^j_k + a^j_k \theta^k_i$ ifadesinin dış türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k = \frac{1}{2} S^j_{ikl} \theta^k \wedge \theta^l$$

elde edilir. Buradaki S^j_{ikl} terimlerinin eğrilik tensörü R^q_{prs} cinsinden ifadesi

$$S^j_{ikl} = (a^{-1})^j_q a^p_i a^r_k a^s_l R^q_{prs}$$

ile verilir. Sonuç itibariyle

$$\begin{aligned} d\theta^j - \theta^k \wedge \theta^j_k &= \Theta^j \\ d\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k &= \Theta^j_i \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Θ^j ve Θ_i^j'ye sırasıyla torsiyon ve eğrilik 2-form denir ve

$$\begin{aligned}\Theta^j &= \frac{1}{2}P^j_{kl}\theta^k \wedge \theta^l \\ \Theta^j_i &= \frac{1}{2}S^j_{ikl}\theta^k \wedge \theta^l\end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. P^s_{lj} veR^q_{prs} terimleri seçilen yerel koordinat sisteminden bağımsız olduğundan bu denklemler tüm P üzerinde geçerlidir. Bu denklemlere P üzerinde D konneksiyonu tarafından belirlenmiş *yapı denklemleri* denir. Bu denklemlerin dış türevi alınırarak

$$\begin{aligned}d\Theta^j - \Theta^k \wedge \theta^j_k - \theta^k \wedge \Theta^j_k &= 0 \\ d\Theta^j_i - \Theta^k_i \wedge \theta^j_k - \theta^k_i \wedge \Theta^j_k &= 0\end{aligned}$$

Bianchi özdeşlikleri elde edilir (Chern vd 2000).

P üzerinde dikey uzay V'nin

$$\theta^i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Pfaffian sistemi ile berlirlendiği yukarıda söylenmişti. Her $x \in P$ için

$$\theta^i_j = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m$$

Pfaffian sistemiyle belirlenen T_xP'nin m-boyutlu altuzayına yatay uzay denir ve $H(x)$ ile gösterilir. Bu şekilde belirlenen dağılım H'ye *yatay uzayların alanı* denir. D konneksiyonu P üzerinde bir yatay uzay belirler ve D tarafından belirlenen H aşağıdaki özelliklere sahiptir:
1. Her $x \in P$ için

$$T_xP = V(x) \oplus H(x),$$

ayrışımı vardır ve $H(x)$'in π izdüşümü altındaki görüntüsü T_pM'ye izomorfiktir $(p = \pi(x))$.
2. H, $GL(m, \mathbb{R})$'nin P üzerindeki sol etkisi altında invaryanttır, yani

$$(L_a)_* H(x) = H(L_a(x))$$

dir. Öte yandan TP'nin yukarıdaki iki özelliği sağlayan bir H altuzayı varsa o zaman H'yi P çatı demetinin yatay uzayların alanı olarak belirleyen M üzerinde bir D konneksiyonu vardır (Kobayashi ve Nomizu 1969), (Chern vd 2000). Dolayısıyla bir afin konneksiyon belirlemekle TP'nin yukarıdaki iki özelliği sağlayan m-boyutlu bir altuzayını belirlemek aynı anlamdadır.

3. 3-BOYUTLU DİNAMİK SİSTEMLER

3.1. Poisson Yapısı

Tanım 3.1.1 M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\{.,.\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

bilineer dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir *Poisson yapısı* denir (Vaisman 1994).

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= -\{g,f\} \\ \{fg,h\} &= f\{g,h\} + g\{f,h\} \\ 0 &= \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \end{aligned}$$

Üzerindeki Poisson yapısı ile birlikte M manifolduna *Poisson manifoldu* denir.

Tanım gereği

$$\{f,.\} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

bir derivasyon tanımlar. Dolayısıyla $\forall f \in C^\infty(M)$ için

$$\{f,g\} : X_f(g) = -X_g(f) = dg(X_f) = -df(X_g) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir X_f vektör alanı karşılık gelir. Bu vektör alanına f nin *Hamiltonyen vektör alanı* f'ye ise *Hamiltonyen* denir (Vaisman 1994). Hamiltonyen vektör alanının integral eğrisine *Hamiltonyen akış* denir. Hamiltonyen akış boyunca değişmeyen fonksiyona yani

$$\frac{dg}{dt} = \{f,g\} = 0,$$

eşitliğini sağlayan fonksiyona *ilk integral* denir. (İlk integral tek değildir. Örneğin f ilk integral ise herhangi $c \in \mathbb{R}$ için $f + c$ de ilk integraldir.) (3.1) den görüldüğü üzere $\{f,g\}$ değeri T^*M üzerinde anti-simetrik bilineer form ile belirlenir, yani $(U;x^i)$, $\mathbb{R}^3$'ün bir yerel koordinat sistemi olmak üzere $\partial_i = \partial/\partial x^i$ koordinat vektör alanları göz önüne alınırsa, M üzerindeki bir Poisson yapısı yerel olarak

$$\begin{aligned} \{f,g\} = \Omega(df,dg) &= \sum_{i,j} \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \Omega \in \Lambda^2 TM, \\ &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} (\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)(df,dg) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Vaisman 1994).

$$\Omega = \Omega^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$$

tensörüne *Poisson bi-vektörü* denir ve Jacobi özdeşliği

$$\Omega^{i[j}\partial_i\Omega^{kl]} = 0$$

şeklinde verilir. Burada $[j\ k\ l]$ j, k, l indeksleri üzerine etki eden anti-simetrileştirme operatörüdür. Bunu göstermek için

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{3.2}$$

ifadesi her $f, g, h \in C^\infty(M)$ için doğru olduğundan $f = x^s$, $g = x^r$, $h = x^t$ koordinat fonksiyonları alınırsa

$$\begin{aligned} \{f, g\} = \{x^s, x^r\} &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\frac{\partial x^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^r}{\partial x^j} - \frac{\partial x^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^r}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\delta_i^s \delta_j^r - \delta_j^s \delta_i^r \right) = \Omega^{sr} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\{g, h\} = \Omega^{rt}$, $\{h, f\} = \Omega^{ts}$ elde edilir. Bu ifadeler (3.2) de yerine yazılırsa Jacobi özdeşliği

$$\{f, \Omega^{rt}\} + \{g, \Omega^{ts}\} + \{h, \Omega^{sr}\} = 0 \tag{3.3}$$

halini alır. Buradan Ω'nın tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \{f, \Omega^{rt}\} = \{x^s, \Omega^{rt}\} &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\frac{\partial x^s}{\partial x^i}\frac{\partial \Omega^{rt}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Omega^{rt}}{\partial x^i}\frac{\partial x^s}{\partial x^j} \right) = \Omega^{sj}\partial_j\Omega^{rt} \\ \{g, \Omega^{ts}\} = \{x^r, \Omega^{ts}\} &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\frac{\partial x^r}{\partial x^i}\frac{\partial \Omega^{ts}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Omega^{ts}}{\partial x^i}\frac{\partial x^r}{\partial x^j} \right) = \Omega^{rj}\partial_j\Omega^{ts} \\ \{h, \Omega^{sr}\} = \{x^t, \Omega^{sr}\} &= \sum_{i<j} \Omega^{ij} \left(\frac{\partial x^t}{\partial x^i}\frac{\partial \Omega^{rs}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Omega^{rs}}{\partial x^i}\frac{\partial x^t}{\partial x^j} \right) = \Omega^{tj}\partial_j\Omega^{sr} \end{aligned}$$

ifadeleri toplanırsa

$$\Omega^{sj}\partial_j\Omega^{rt} + \Omega^{rj}\partial_j\Omega^{ts} + \Omega^{tj}\partial_j\Omega^{sr} = 0$$

Jacobi özdeşliği elde edilir.

Tanım 3.1.2 $x \in M$ $v \in \Gamma(TM)$ olsun.

$$\dot{x} = v(x), \quad x = (x^1, x^2, x^3)$$

diferensiyel denklemine v vektör alanı tarafından belirlenen *dinamik sistem* denir (Arnold 1983). Burada $\dot{x}$, x'in bir t parametresine göre türevini ifade eder.

Tanım 3.1.3 Bir Poisson manifoldu üzerinde

$$\dot{x} = v(x) = \Omega(x)(dH(x), .), \tag{3.4}$$

ile tanımlanan dinamik sisteme *Hamiltonyen dinamik sistem* H fonksiyonuna ise *Hamiltonyen fonksiyonu* denir (Abadoğlu ve Gümral 2009), (Gümral ve Nutku 1993).

$dH = \frac{\partial H}{\partial x^k} dx^k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Omega(dH, .) &= \sum_{i<j} \Omega^{ij}(\partial_i \otimes \partial_j - \partial_j \otimes \partial_i)(dH, .) \\
&= \sum_{i<j} \Omega^{ij}(\frac{\partial H}{\partial x^i}\partial_j - \frac{\partial H}{\partial x^j}\partial_i) \\
&= \big(\Omega^{31}H_z - \Omega^{12}H_y, \Omega^{12}H_x - \Omega^{23}H_z, \Omega^{23}H_y - \Omega^{31}H_x\big)
\end{aligned}$$

dir. $*$ operatörü Hodge dual operatör yani V, n-boyutlu reel vektör uzayı ve $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $u, v \in \Lambda^k(V)$ için

$$* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

$v \wedge *u = (v \cdot u)dV$, $**v = (-1)^{k(n-k)}v$ şeklinde tek türlü tanımlanan operatör olsun. (Burada $dV = \frac{1}{6}\epsilon^{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k$, V'nin hacim elemanıdır). $e_i = \partial_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
*(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \\
*(e_1 \wedge e_3) &= -e_2 \\
*(e_2 \wedge e_3) &= e_1
\end{aligned}$$

olduğundan Ω Poisson bi-vektörüne

$$\mathbf{J} = *\Omega = (\Omega^{23}, \Omega^{31}, \Omega^{12}) \tag{3.5}$$

vektörü karşılık getirilebilir. Bu durumda (3.4) vektör alanı

$$v = \mathbf{J} \times \nabla H \tag{3.6}$$

ile ifade edilebilir. Bu notasyonda Jacobi özdeşliği

$$\mathbf{J} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = 0$$

ile verilir (Abadoğlu ve Gümral 2009).

3.2. Bi-Hamiltonyen Yapı

Tanım 3.2.1 $\{.,.\}_1$ ve $\{.,.\}_2$ M manifoldu üzerinde iki Poisson yapısı olmak üzere

$$c_1\{.,.\}_1 + c_2\{.,.\}_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

lineer kombinasyonu da M üzerinde Poisson yapısı belirtiyorsa $\{.,.\}_1$ ve $\{.,.\}_2$ yapılarına *uyumlu Poisson yapıları* denir (Adler vd 2004). M üzerinde iki uyumlu Poisson yapısı varsa bu durumda M üzerinde *bi-Hamiltonyen yapı* var denir.

Tanım 3.2.2 Üç boyutlu bir manifold üzerinde bir v vektör alanının aşağıdaki gibi yazılabildiği iki Hamiltonyen fonksiyonu ve iki uyumlu Poisson yapısı varsa v vektör alanına *bi-Hamiltonyen vektör alanı* ve v vektör alanı tarafından belirlenen dinamik sisteme de *bi-Hamiltonyen dinamik sistem* denir (Adler vd 2004):

$$v = (\Omega_1^{ij}\partial_i \wedge \partial_j)(dH_2, .) = (\Omega_2^{ij}\partial_i \wedge \partial_j)(dH_1, .). \tag{3.7}$$

Bu durumda $v\rfloor dH_i = 0$ olacağından H_1 ve H_2 fonksiyonları sırasıyla Ω_1 ve Ω_2 Poisson yapılarına karşılık gelen Hamiltonyen fonksiyonlardır. Her iki Poisson yapısı için (3.5) kullanılırsa (3.7) vektör alanı

$$v = \mathbf{J}_1 \times \nabla H_2 = \mathbf{J}_2 \times \nabla H_1$$

şeklinde ifade edilir. Ω_1 ve Ω_2 Poisson yapılarından elde edilmiş lineer bağımsız Poisson vektörleri $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_2$ için uyumluluk şartı $\mathbf{J} = c_1\mathbf{J}_1 + c_2\mathbf{J}_2$ vektörü için

$$\mathbf{J} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) = 0 \tag{3.8}$$

Jacobi özdeşliği ile verilir. Bu eşitlik $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için her zaman sağlanır.

Tanım 3.2.3

$$J = \Omega\rfloor dV = \imath_\Omega dV = dV(\Omega)$$

şeklinde tanımlanan diferensiyel 1-forma *Poisson 1-form* denir. Bu durumda Jacobi özdeşliği (3.8)'e denk olarak

$$J \wedge dJ = 0 \tag{3.9}$$

integre edilebilirlik koşulu ile verilir (Abadoğlu ve Gümral 2009), (Gümral ve Nutku 1993).

Yukarıda vektörler için ifade edilen uyumluluk şartı Poisson 1-formlar kullanılarak $(c_1J^1 + c_2J^2) \wedge d(c_1J^1 + c_2J^2) = 0$ şeklinde de ifade edilebilir. Ancak J^1, J^2 Poisson 1-formlar olmak üzere, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sayıları yerine diferensiyellenebillir keyfi f, g fonksiyonları alınırsa $(fJ^1 + gJ^2) \wedge d(fJ^1 + gJ^2) = 0$ eşitliği her zaman sağlanmaz. $J \mapsto gJ$

dönüşümü altında Jacobi özdeşliği $J \wedge dJ \mapsto g^2 J \wedge dJ$ şeklinde dönüştüğünden J^1 ve J^2 Poisson 1-formlarının uyumluluk şartı için $J = J^1 + gJ^2$ diferensiyel formuna bakmak yeterlidir. Bu 1-formun $J \wedge dJ = 0$ Jacobi özdeşliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul, g'nin

$$J^1 \wedge J^2 \wedge dg = (J^1 \wedge dJ^2 + J^2 \wedge dJ^1)g. \tag{3.10}$$

kısmi türevli lineer diferensiyel denkleminin bir çözümü olmasıdır. (3.10) denkleminin her zaman bir yerel çözümü var olduğundan (karakteristikler yöntemi), üç boyutlu bir manifold üzerinde verilen iki yerel Poisson 1-formunu uyumlu hale getirecek bir g fonksiyonu her zaman bulunabilir. (3.10) denklemi vektör formunda

$$(\mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_2) \cdot \nabla g = (\mathbf{J}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_2) + \mathbf{J}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{J}_1))\, g \tag{3.11}$$

ile verilir. Ancak $v(J^1) = 0$ ve $v(J^2) = 0$ olduğu dikkate alınırsa, (3.10) denkleminin sol tarafının sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul g fonksiyonunun yalnızca H_1 ve H_2 Hamiltonyenlerine bağlı bir fonksiyon olmasıdır denilebilir. Bu durumda J^1 ve J^2 Poisson yapılarının uyumluluk şartı $J = J^1 + g(H_1, H_2)J^2$ formu için

$$J^1 \wedge dJ^2 + J^2 \wedge dJ^1 = 0$$

şeklinde ifade edilir.

3.3. Riccati Denklemi

$U \subset \mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı

$$\dot{x} = v(x) = \Omega(x)(dH(x), .), \tag{3.12}$$

Hamiltonyen dinamik sistem göz önüne alınsın. Yerel olarak bu dinamik sistemin integral eğrisi üzerindeki her noktada $(\hat{e}_1 = \mathbf{t}, \hat{e}_2 = \mathbf{n}, \hat{e}_3 = \mathbf{b})$ Frenet-Serret çatısı tanımlıdır. Frenet-Serret çatısı orthonormal bir çatı olduğundan $(e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, e_3 = \frac{\partial}{\partial x^3})$ sağ-el oryantasyonlu koordinat çatısıyla arasındaki ilişki

$$\hat{e}_i = a_i^j e_j, \qquad (a_i^j) \in SO(3, \mathbb{R})$$

şeklindedir. Jacobian matrisi

$$(a_i^j)^T = \begin{pmatrix} \partial_{y^1} x^1 & \partial_{y^2} x^1 & \partial_{y^3} x^1 \\ \partial_{y^1} x^2 & \partial_{y^2} x^2 & \partial_{y^3} x^2 \\ \partial_{y^1} x^3 & \partial_{y^2} x^3 & \partial_{y^3} x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \mid & \hat{e}_2 \mid & \hat{e}_3 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

olacak şekilde

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$$

koordinatları tanımlansın. det(a_i^j)=1 olduğundan bu koordinat dönüşümünün tersi yerel olarak her zaman tanımlıdır ve

$$\nabla = e_1\partial_{x^1} + e_2\partial_{x^2} + e_3\partial_{x^3}$$

kartezyen gradient operatörü (y^1, y^2, y^3) koordinatlarında

$$\nabla = \hat{e}_1\partial_{y^1} + \hat{e}_2\partial_{y^2} + \hat{e}_3\partial_{y^3}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\partial_{y^1} = \hat{e}_1 \cdot \nabla, \;\; \partial_{y^2} = \hat{e}_2 \cdot \nabla, \;\; \partial_{y^3} = \hat{e}_3 \cdot \nabla$$

yöne göre türevleri göz önüne alınırsa (y^1, y^2, y^3) yerel koordinatlarına $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ vektör alanları doğrultusundaki koordinatlar gözü ile bakılabilir.

$$v = \| v \| \hat{e}_1 = \mathbf{J} \times \nabla H$$

olduğundan $v \perp \mathbf{J}$ ve $v \perp \nabla H$ dir. O halde **J** Poisson vektörü

$$\mathbf{J} = \alpha(y^1, y^2, y^3)\hat{e}_2 + \beta(y^1, y^2, y^3)\hat{e}_3$$

biçiminde yazılabilir. **J** Poisson vektörü için Jacobi özdeşliği $\mathbf{J}.(\nabla \times \mathbf{J}) = 0$ hesaplanırsa

$$\partial_{y^1}\mu = \hat{e}_2 \cdot \nabla \times \hat{e}_2 + \mu\left(\hat{e}_2 \cdot \nabla \times \hat{e}_3 + \hat{e}_3 \cdot \nabla \times \hat{e}_2\right) + \mu^2\hat{e}_3 \cdot \nabla \times \hat{e}_3, \;\; \mu = \beta/\alpha \quad (3.14)$$

Riccati denklemi tipinde kısmi türevli bir diferensiyel denklem elde edilir (Abadoğlu ve Gümral 2009). Burada Riccati denkleminin lineer olup olmaması sadece $\hat{e}_3$ vektör alanının holonomik olup olmamasına bağlıdır. O zaman Riccati denklemi

$$\partial_{y^1}\mu = \hat{e}_2 \cdot \nabla \times \hat{e}_2 + \mu\left(\hat{e}_2 \cdot \nabla \times \hat{e}_3\right)$$

denklemine indirgenir. $\hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ vektör alanlarının ikisi de holonomik vektör alanlarıysa o zaman Riccati denklemi

$$\partial_{y^1}\mu = 0$$

denklemine indirgenir. Örneğin

$$\dot{x} = v(x) = \Omega(x)(dH(x), .),$$

dinamik sistemi sabitse yani $v = \mathbf{c}$: $sbt.$ bir vektör alanı ile belirleniyorsa o zaman (a_i^j) matrisi de sabittir. Bu durumda

$$\hat{e}_i \cdot (\nabla \times \hat{e}_i) = 0, \;\; i = 1, 2, 3$$

olacağından (3.14) denklemi $\partial_{y^1}\mu = 0$ denklemine indirgenir. Bu denklemin çözümü $\mu = \mu(y^2, y^3)$ şeklindedir ve y^2, y^3 koordinatları dinamik sistemin Hamiltonyen fonksiyonlarına karşılık gelir. O zaman $\mathbf{J}_1 = \hat{e}_2 + y^2\hat{e}_3$ ve $\mathbf{J}_2 = \hat{e}_2 + y^3\hat{e}_3$ Poisson vektörleri uyumldur. Öte yandan Riccati denklemi (3.14) ikinci bertebeden bir lineer diferensiyel denkleme eşdeğer olduğundan yerel olarak her zaman iki tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözümler μ_1, μ_2 ile gösterilirse

$$\mathbf{J}_i = \alpha_i(\hat{e}_2 + \mu_i\hat{e}_3), \;\; i = 1, 2$$

şeklinde tanımlı Poisson vektörleri yani Riccati denkleminin lineer bağımsız çözümleri vasıtasıyla oluşturulan Poisson vektörleri uyumludur (Abadoğlu ve Gümral 2009). Bu şekilde tanımlanan uyumlu Poisson vektörleri vasıtasıyla üç boyutlu bir dinamik sistem her zaman yerel olarak bi-Hamiltonyen formda yani

$$v(x) = \phi(x)\nabla H_1 \times \nabla H_2 \tag{3.15}$$

formunda ifade edilebilir .

Teorem 3.3.1 *μ_1 ve μ_2 Riccati denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere*

$$\mathbf{J}_i = \alpha_i(\hat{e}_2 + \mu_i\hat{e}_3) = (-1)^{i+1}\phi\nabla H_i$$

biçiminde tanımlı Poisson vektörleri uyumludur ve dinamik sistem yerel olarak

$$v = \phi\nabla H_1 \times \nabla H_2$$

bi-Hamiltonyen formda ifade edilir (Abadoğlu ve Gümral 2009).

3.4. Riccati Denklemi için Dönüşüm Kuralı

$(U; x^i)$ ve $(V, \bar{x}^i)$ $\mathbb{R}^3$'ün iki yerel koordinat komşuluğu, $\Phi : U \to V$ difeomorfizması da U üzerinde tanımlı $\dot{x} = v(x)$ dinamik sisteminin integral eğrisini, V üzerinde tanımlanan $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(\bar{x})$ dinamik sistemin integral eğrisine dönüştüren bir yerel difeomorfizma olsun. Yani $\Phi_* v = \bar{v}$ olsun. Bu eğriler üzerinde Frenet-Serret çatıları vasıtasıyla (2.9) deki gibi tanımlanan Frenet-Serret koordinatları (y^i) ve $(\bar{y}^i)$ ile gösterilsin. ω^i ve $\bar{\omega}^i$ Frenet çatılarının dual çatıları yani U ve V üzerinde tanımlı eşçatılar olmak üzere bu iki eşçatı arasındaki ilişki

$$\begin{tikzcd}
(x^1, x^2, x^3) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \arrow[d, "\bar{\Psi}"] \\
(y^1, y^2, y^3) \arrow[r, "\Phi_y"'] & (\bar{y}^1, \bar{y}^2, \bar{y}^3)
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagram ile ifade edilir.

$$\bar{\Psi} \circ \Phi = \Phi_y \circ \Psi \text{ ya da } \bar{\Psi} \circ \Phi \circ \Psi^{-1} = \Phi_y.$$

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\Psi} \circ \Phi \circ \Psi^{-1}\right)^* (\bar{\omega}^i) &= \Psi^{-1*} \left(\Phi^* \left(\bar{\Psi}^*(\bar{\omega}^i)\right)\right) = \Psi^{-1*} \left(\Phi^*(\bar{b}^i_j d\bar{x}^j)\right) \\
&= \Psi^{-1*} \left((\bar{b} \circ \Phi)^i_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} dx^k\right) = (\bar{b} \circ \Phi \circ \Psi^{-1})^i_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} a^k_s \omega^s \\
&= b^i_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} a^k_s \omega^s = \Phi^*_y(\bar{\omega}^i),
\end{aligned}$$

olduğundan, Frenet-Serret eşçatıları için dönüşüm kuralı yani Φ_y difeomorfizmasının Jacobian matrisi üzerindeki şart

$$\Gamma^i_s = b^i_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} a^k_s \in SO(3, \mathbb{R}) \tag{3.16}$$

matrisiyle ifade edilir. $a, \Gamma \in SO(3, \mathbb{R})$ ve $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \in GL(3, \mathbb{R})$ olduğundan (3.16) ifadesine kutupsal ayrışım gözü ile bakılabilir.

$$\Theta = \Gamma\omega, \quad d\omega = \theta \wedge \omega$$

tanımlanırsa

$$d\Theta = (d\Gamma\Gamma^{-1} - \Gamma\theta\Gamma^{-1}) \wedge \Theta$$

elde edilir. Bu eşitlik Frenet-Serret çatısı için yapı denklemlerini ifade eder ve $\Omega_F = d\Gamma\Gamma^{-1} - \Gamma\theta\Gamma^{-1}$ torsiyonu sıfır olan konneksiyon form tanımlar. Γ^i_s fonksiyonları U üzerindeki çatı demeti P_U'nun iki kesiti arasındaki ilişkiyi ifade eden geçiş fonksiyonlarıdır. Eğer Φ difeomorfizması ortogonal ise o zaman $b^i_j \in SO(3, \mathbb{R})$ ve $a^k_s = (b^{-1})^k_s$. dir. $\Phi_* v = \bar{v}$ ve Frenet-Serret çatısı orthonormal bir çatı olduğundan Γ^i_s matrisi

$$\Gamma^i_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

formundadır. (x^i) ve $(\bar{x}^i)$ koordinatlarındaki Frenet-Serret çatıları sırasıyla $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ve $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ile gösterilirse

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. $\mu = \beta/\alpha$ olmak üzere $\mathbf{J} = \alpha\hat{e}_2 + \beta\hat{e}_3$ vektörü Jacobi özdeşliğini sağladığından

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot(\nabla\times\mathbf{J}) &= (\alpha\hat{e}_2+\beta\hat{e}_3)\cdot\nabla\times(\alpha\hat{e}_2+\beta\hat{e}_3)\\ &= A^2\bar{e}_2\cdot\nabla\times\bar{e}_2+(B\nabla A-A\nabla B)\cdot\bar{e}_1+AB\,(\bar{e}_2\cdot\nabla\times\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\nabla\times\bar{e}_2)\\ &+ B^2\bar{e}_3\cdot\nabla\times\bar{e}_3=0,\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$ ve $B=\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta$ biçiminde tanımlıdır. $\bar{\mu}=B/A$ tanımlanırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot(\nabla\times\mathbf{J}) &= \bar{e}_2\cdot\nabla\times\bar{e}_2+\bar{\mu}\,(\bar{e}_2\cdot\nabla\times\bar{e}_3+\bar{e}_3\cdot\nabla\times\bar{e}_2)+\bar{\mu}^2\bar{e}_3\cdot\nabla\times\bar{e}_3-\partial_{\bar{y}^1}\bar{\mu}\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\bar{\mu}$ fonksiyonu μ cinsinden

$$\bar{\mu}=\frac{\mu+\tan\theta}{1-\mu\tan\theta}$$

olarak ifade edilir ve dolayısıyla Riccati denklemi v etrafında dönme altında invaryanttır.

En genelde, $\dot{x}=v(x)$ vektör alanı, çatı demetine sonsuz farklı şekilde lift edebilir. Yani üç boyutlu uzayda bir v vektör alanı belirlendiğinde $\dot{x}=v(x)=\|\mathbf{v}\|e_1$ olacak şekilde sonsuz farklı şekilde (e_1,e_2,e_3) ortonormal çatı seçilebilir ve bu seçim Riccati denklemi (3.14)'nin formunu değiştirmez.

$\mathbb{R}^3$'ün bir $(U;u^i)$ yerel koordinat komşuluğu üzerinde tanımlanmış $\dot{x}=v(x)$ dinamik sistemi ve $v(x)=\|\mathbf{v}\|e_1$ olacak şekilde (e_1,e_2,e_3) sağ-el oryantasyonlu keyfi bir ortonormal çatı göz önüne alınsın. Bu çatı tarafından belirlenen yerel koordinat sistemi (x^1,x^2,x^3) olsun. Yani

$$e_i=a_i^j\frac{\partial}{\partial u^j},\qquad (a_i^j)\in SO(3,\mathbb{R})$$

ve

$$(a_i^j)^T=\begin{pmatrix}\partial_{x^1}u^1 & \partial_{x^2}u^1 & \partial_{x^3}u^1\\ \partial_{x^1}u^2 & \partial_{x^2}u^2 & \partial_{x^3}u^2\\ \partial_{x^1}u^3 & \partial_{x^2}u^3 & \partial_{x^3}u^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\,| & e_2\,| & e_3\end{pmatrix}$$

olsun. $\mathbf{J}\perp\mathbf{v}=\|\mathbf{v}\|e_1$ olduğundan

$$\mathbf{J}=\alpha e_2+\beta e_3$$

şeklinde yazılır. **J** Poisson vektörü için Jacobi özdeşliği yine

$$\partial_{x^1}\mu=e_2\cdot\nabla\times e_2+\mu\,(e_2\cdot\nabla\times e_3+e_3\cdot\nabla\times e_2)+\mu^2 e_3\cdot\nabla\times e_3, \tag{3.17}$$

Riccati denklemiyle ifade edilir. Yani **J** Poisson vektörü için Jacobi özdeşliğinin Riccati denklemi ile sonuçlanması $\dot{x} = v(x)$ vektör alanının, çatı demeti P_U'nun ortonormal bir kesitine $\dot{x} = v(x) = \|\mathbf{v}\| e_1$ olacak şekilde lift edilmesi dışında başka bir seçime bağlı değildir. Aslında buradaki ortonormallik şartı da esnetilebilir. Jacobian matrisi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\hat{x}^1 \\ d\hat{x}^2 \\ d\hat{x}^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = cg - ef. \\ \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/b & 0 & 0 \\ 0 & g/\Delta & -f/\Delta \\ 0 & -e/\Delta & c/\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.18}$$

olacak şekilde $\hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, x^2)$ yerel koordinat döüşümü göz önüne alınsın. O zaman gradient operatörü

$$\begin{aligned} \nabla &= e_1\partial_{x^1} + e_2\partial_{x^2} + e_2\partial_{x^3} \\ &= b^2\hat{e}_1\partial_{\hat{x}^1} + (c^2 + e^2)\hat{e}_2\partial_{\hat{x}^2} + (f^2 + g^2)\hat{e}_3\partial_{\hat{x}^3} + (cf + eg)\left(\hat{e}_2\partial_{\hat{x}^3} + \hat{e}_3\partial_{\hat{x}^2}\right) \end{aligned}$$

olacağından

$$\mathbf{J} = \alpha e_2 + \beta e_3$$

Poisson vektöründe için Jacobi özdeşliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\cdot(\nabla\times\mathbf{J}) &= \hat{e}_2\cdot\nabla\times\hat{e}_2 + \hat{\mu}\left(\hat{e}_2\cdot\nabla\times\hat{e}_3 + \hat{e}_3\cdot\nabla\times\hat{e}_2\right) + \hat{\mu}^2\hat{e}_3\cdot\nabla\times\hat{e}_3 - \frac{b}{\Delta}\partial_{\hat{x}^1}\hat{\mu} \\ &= e_2\cdot\nabla\times e_2 + \mu\left(e_2\cdot\nabla\times e_3 + e_3\cdot\nabla\times e_2\right) + \mu^2 e_3\cdot\nabla\times e_3 - \partial_{x^1}\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \frac{g\mu + f}{e\mu + c}, \;\; cg - ef \neq 0. \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlıdır. Yani Riccati denkleminin formu lineer kesirsel dönüşüm altında korunur.

4. CARTAN'IN EŞDEĞERLİK METODU

Genel itibariyle bir eşdeğerlik problemi bir manifold üzerindeki iki geometrik nesnenin bir diferensiyel denklem sisteminin çözümü olarak elde edilen bir difeomorfizma sınıfı yoluyla birbirine dönüştürülüp dönüştürülemeyeceği problemidir. Bu şekilde belirlenen bir difeomorfizma sınıfının olması için gerek ve yeter koşullar, söz konusu geometrik nesnenin diferensiyel invaryantları ile ifade edilir. Cartan'ın eşdeğerlik metodunun amacı, iki geometrik nesnenin eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşulları belirlemek ve bu amaçla geometrik nesneyi ifade eden kanonik bir eşçatı yani kotanjant demetin diferensiyellenebilir bir kesitini bulmaktır. Başlangıçta böyle bir kanonik eşçatı olmak zorunda değildir. Bu yüzden söz konusu geometrik nesneyi temsil edebilecek tüm olası eşçatılar göz önüne alınır. Bu anlamda bir eşdeğerlik problemi şu şekilde ifade edilir (Gardner 1989):

$\bar{\omega} = (\bar{\omega}^1_{\bar{U}}, ..., \bar{\omega}^m_{\bar{U}})$ ve $\omega = (\omega^1_U, ..., \omega^m_U)$ sırasıyla $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^m$ açık altkümeleri üzerinde tanımlı iki eşçatı ve $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ olmak üzere her $x \in U$ için

$$\Phi^* \bar{\omega} = g(x)\omega, \qquad g \in G \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $\Phi : U \to \bar{U}$ difeomorfizmasının var olması için gerek ve yeter koşullar nelerdir?

4.1. Eşçatıların Eşdeğerlik Problemi

$\theta = (\theta^1, ..., \theta^m)$ ve $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^1, ..., \bar{\theta}^m)$ m-boyutlu $U \subset M$ ve $\bar{U} \subset \overline{M}$ manifoldları üzerinde iki eş çatı olsun. Eşçatıların eşdeğerlik problemi,

$$\Phi^* \bar{\theta}^i = \theta^i, \quad i = 1, ..., m \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir Φ difeomorfizmasının olup olmadığına karar verme problemidir. Dış türev ve geri-çekme operatörleri değişmeli olduğundan, (4.2) eşitliği geçerli ise

$$\Phi^* d\bar{\theta}^i = d\theta^i, \quad i = 1, ..., m \tag{4.3}$$

eşitliği de sağlanmak zorundadır. θ^i elemanının dış türevi

$$d\theta^i = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} T^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k. \tag{4.4}$$

2-formuyla ifade edilir. Buradaki $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ tane $T^i_{jk} = T^i_{jk}(x)$ fonksiyonlarına θ eşçatısıyla ilişkili *yapı fonksiyonları* denir. θ eşçatısına eşdeğer $\overline{M}$ üzerindeki herhangi bir $\bar{\theta}$ eşçatısı için de

$$d\bar{\theta}^i = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} \overline{T}^i_{jk} \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k \tag{4.5}$$

yapı denklemleri göz önüne alınsın. (4.4) ve (4.5) denklemleri (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} T^i_{jk}(x)\theta^j \wedge \theta^k = d\theta^i = \Phi^* d\bar{\theta}^i = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} \overline{T}^i_{jk} \left(\Phi(x)\right) \theta^j \wedge \theta^k \tag{4.6}$$

elde edilir. θ^j 1-formları lineer bağımsız olduğundan

$$0 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} \left(T^i_{jk}(x) - \overline{T}^i_{jk} \left(\Phi(x)\right) \right) \theta^j \wedge \theta^k$$

ifadesindeki herbir $\theta^j \wedge \theta^k$ teriminin katsayıları sıfıra eşit olmak zorundadır ve dolayısıyla

$$T^i_{jk}(x) = \overline{T}^i_{jk}(\bar{x}), \quad \bar{x} = \Phi(x) \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) şartları iki eşçatının eşdeğer olabilmesi için gerek şartlardır. Örneğin, verilen bir θ eşçatısı için yapı fonksiyonları T^i_{jk} sabit ise, θ eşçatısına eşdeğer olan herhangi bir $\bar{\theta}$ eşçatısı için $\overline{T}^i_{jk}$ fonksiyonları da aynı sabit değeri almak zorundadır. Öte yandan, yapı fonksiyonlarından en az birisinin sabit olmadığı durumda iki eşçatının eşdeğer olup olmadığı hakkında sadece yapı fonksiyonlarına bakarak öyle ya da böyle bir şey söylenmesi güçtür. Bunun sebebi yapı fonksiyonlarının yerel koordinatlardaki ifadesinin invaryant olmayışıdır. Ancak, yapı fonksiyonları ve onların invaryant türevleriyle eşdeğerlik problemi için yeter şartlarda belirlenebilir.

4.2. Türetilmiş İnvaryantlar ve Tasnif Manifoldları

Önceki bölümde değinildiği üzere eğer iki eşçatı eşdeğerse yani bir difeomorfizma altında birbirlerine dönüşebiliyorlarsa o zaman söz konusu eşçatısıyla ilişkili $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ tane $T^i_{jk} = T^i_{jk}(x)$ yapı fonksiyonu eşdeğerlik probleminin invaryant fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar vasıtası ile yeni skaler invaryantlar türetilebilir.

$I(x)$ bir skaler invaryant ve $\bar{I}(\bar{x})$ da $\bar{x} = \Phi(x)$ difeomorfizması altında karşılık gelen invaryant olsun. Yani $\bar{I}(\bar{x}) = I(x)$ olsun. O zaman $\Phi^* d\bar{I} = dI$'dır. Bu eşitlik eşçatı elemanları cinsinden

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial I}{\partial \theta^j}(x)\theta^j = dI(x) = \Phi^* d\bar{I}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{\theta}^j} \left(\Phi(x)\right) \theta^j \tag{4.8}$$

şeklinde yazılır. θ^j 1-formları doğrusal bağımsız olduğundan, invaryant fonksiyonun eşçatı türevleri de invaryant fonksiyonlardır:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{\theta}^j}(\bar{x}) = \frac{\partial I}{\partial \theta^j}(x), \quad \bar{x} = \Phi(x).$$

Dolayısıyla bir invaryant fonksiyon I'nın gitgide daha yüksek mertebeden eşçatı türevleri alınarak ($I, \partial I/\partial\theta^j, \partial^2 I/\partial\theta^j\partial\theta^k$,...) invaryant olmaya aday fonksiyonların sonsuz bir kolleksiyonu elde edilmiş olur. Bu şekilde elde edilen fonksiyonlara I fonksiyonu ile ilişkili *türetilmiş invaryantlar* denir (Olver 1995). Bu fonksiyonlara invaryant olmaya aday fonksiyonlar denilmesinin sebebi, bu fonksiyonların tamamının fonksiyonel olarak bağımsız olmamasından kaynaklanmaktadır. Gerçekten, (4.8) eşitliğinde her iki tarafın dış türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\theta^k\partial\theta^j} - \frac{\partial^2 I}{\partial\theta^j\partial\theta^k} = \sum_{i=1}^{m} T^i_{jk}\frac{\partial I}{\partial\theta^i}$$

elde edilir. Buradan ikinci mertebeden eşçatı türevin sırasını değiştirmek için daha düşük mertebeden türetilmiş invaryantların kullanılabileceği görülmektedir. Ayrıca (4.4) yapı denklemlerinin dış türevi alınarak Jacobi özdeşliği elde edilmesiyle türetilmiş invaryantlar arasındaki fonksiyonel bağıntılar elde edilir. Türetilmiş ya da orijinal yapı fonksyionlarını ifade etmek için

$$T_\sigma = \frac{\partial^s T^i_{jk}}{\partial\theta^{l_s}\partial\theta^{l_{s-1}}...\partial\theta^{l_1}}, \qquad \sigma = (i, j, k, l_1, ..., l_s)$$

notasyonu göz önüne alınsın. Burada $j < k$ olmak üzere $1 \leq i, j, k, l_k \leq m$ dir. Ayrıca $s =$ordσ tamsayısı türetilmiş invaryantın mertebesini göstermektedir. Eğer iki eşçatı eşdeğer ise o zaman tüm yapı fonksiyonları ve onların eşçatı türevleri aynı olmak zorundadır:

$$\overline{T}_\sigma(\bar{x}) = T_\sigma(x), \quad \bar{x} = \Phi(x), \ \ s \geq 0. \tag{4.9}$$

Tanım 4.2.1 $z^{(s)} = (..., z_\sigma, ...)$ koordinat sistemiyle birlikte $q_s(m) = \frac{1}{2}m^2(m-1)\binom{m+s}{m}$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{K}^{(s)} = \mathbb{K}^{(s)}(m)$'ye m boyutlu M manifolduyla ilişkili s. mertebeden *tasnif uzayı* denir. $z^{(s)}$'nin girdileri, $1 \leq j \leq k \leq m, 1 \leq l_1 \leq l_2 \leq ... \leq l_r \leq m$,
$0 \leq r \leq s$ olmak üzere, azalmayan çoklu indeks $\sigma = (i, j, k, l_1, ..., l_r)$ ile etiketlenmiştir. $\sigma \leq s$ mertebesi için bileşenleri $z_\sigma = T_\sigma(x)$ yapı invaryantları olan $\mathbf{T}^{(s)} : M \to \mathbb{K}^{(s)}$ dönüşümüne M manifoldu üzerindeki θ eşçatısıyla ilişkilendirilmiş *yapı dönüşümü* denir (Olver 1995).

Eğer θ ve $\bar{\theta}$ eşdeğer eşçatılar ise o zaman (4.9) şartından dolayı her $s = 0, 1, 2, ...$ için, karşılık gelen yapı dönüşümleri aynı görüntüye sahiptir:

$$\overline{\mathbf{T}}^{(s)}(\bar{x}) = \mathbf{T}^{(s)}(x), \quad \bar{x} = \Phi(x).$$

Tanım 4.2.2 $U \subset M$ bir açık altküme olmak üzere, $\mathbf{T}^{(s)}$ yapı dönüşümünün görüntüsü

$$\mathcal{C}^{(s)}(\theta, U) = \left\{\mathbf{T}^{(s)}(x) | x \in U\right\} \subset \mathbb{K}^{(s)}$$

kümesine $U \subset M$ açık altkümesi üzerinde tanımlı θ eşçatısıyla ilişkili s. mertebeden *tasnif kümesi* denir (Olver 1995).

Önerme 4.2.3 θ ve $\bar{\theta}$, $\Phi : M \to \overline{M}$ difeomorfizması altında eşdeğer iki eşçatı ise yani $\Phi^{*}\bar{\theta} = \theta$ ise o zaman her $s \geq 0$ için s. mertebeden tasnif kümeleri aynıdır. Yani her $s \geq 0$ için $\mathcal{C}^{(s)}\left(\bar{\theta}, \overline{U}\right) = \mathcal{C}^{(s)}\left(\theta, U\right)$ dur. Burada $U \subset M$ kümesi yerel Φ difeomorfizmasının tanım kümesi ve $\overline{U} = \Phi(U) \subset \overline{M}$ de görüntü kümesidir. Buradaki Φ difeomorfizmasına da *yerel eşdeğerlik dönüşümü* denir (Olver 1995).

Tanım 4.2.4 θ, M üzerindeki bir eşçatı olmak üzere, her $s \geq 0$ için s. mertebeden yapı dönüşümü $\mathbf{T}^{(s)} : M \to \mathbb{K}^{(s)}$ regüler ise yani Jacobian matrisinin rankı sabitse, θ eşçatısına *tamamen regüler* denir (Olver 1995).

Yapı dönüşümü regüler olduğu durumda $\rho_s = rank\mathbf{T}^{(s)} : sbt$ olarak tanımlanırsa, tasnif kümesi $\mathcal{C}^{(s)}$, $\mathbb{K}^{(s)}$'nin ρ_s boyutlu bir altmanifoldu olur. Yani regüler durumda $\mathcal{C}^{(s)}$ kümesine manifold gözü ile bakılabilir.

Tanım 4.2.5 N ve $\overline{N}$ m-boyutlu M manifoldunun n-boyutlu altmanifoldları olsun. Eğer $N \cap \overline{N} \neq \emptyset$ kümesi de M'nin n-boyutlu bir altmanifoldu oluyor ise o zaman N ve $\overline{N}$ altmanifoldları çakışıyor denir (Olver 1995).

Teorem 4.2.6 *θ ve $\bar{\theta}$ sırasıyla m-boyutlu M ve $\overline{M}$ manifoldları üzerinde diferensiyellenebilir ve tamamen regüler eşçatılar olsun. O zaman $\Phi^{*}\bar{\theta} = \theta$ olacak şekilde bir $\Phi : M \to \overline{M}$ yerel difeomorfizminin olması için gerek ve yeter koşul her $s \geq 0$ için s. mertebeden tasnif manifoldları $\mathcal{C}^{(s)}(\theta)$ ve $\mathcal{C}^{(s)}\left(\bar{\theta}\right)$ nın çakışmasıdır (Olver 1995).*

Bu teoreme göre tamamen regüler iki eşçatının eşdeğer olmabilmesi için gerek şartlar yani yapı fonksiyonları ve onlardan türetilmiş invaryantların aynı olması aynı zamanda yeterli şartlardır. İki eşçatının eşdeğerlik probleminin çözümünü ifade eden bu teorem, sonsuz çoklukta şartın gerçeklenmesini gerektirdiğinden pratik açıdan kullanışlı değildir. Bu teoremin özel bir uygulaması olarak yapı fonksiyonları sabit olan bir eşçatı gözönüne alınsın. Bu durumda sıfırıncı mertebeden tasnif manifoldu tek bir noktadan ibarettir ve o nokta $T^{i}_{jk} = C^{i}_{jk},\ i, j, j = 1, ..., m, j < k$ invaryantlarının sabit değerleri ile belirlenir. Yapı fonksiyonları sabit olduğundan tüm türetilmiş invaryantlar sıfırdır ve daha yüksek mertebeden tasnif manifoldları $\mathcal{C}^{(s)}$'ler de tek bir noktadan ibarettir. Dolayısıyla $s \geqslant 0$ için $\rho_s = 0$ dir. Bu tipteki bir eşçatı sıfır ranka sahip bir eşçatı olarak isimlendirilir. Bu eşçatıya eşdeğer herhangi bir eşçatının sıfırıncı mertebeden tasnif manifoldunun da tek bir noktadan ibaret olması için yapı fonksiyonlarının da aynı sabit değerine eşit olması yani $\overline{T}^{i}_{jk} = C^{i}_{jk}$ gerekir. O zaman daha yüksek mertebeden tasnif manifoldları da otomatik olarak aynıdır. Dolayısıyla aynı sabit yapı fonksiyonlarına sahip sıfırıncı mertebeden herhangi iki eşçatı eşdeğerdir.

Yapı dönüşümü regüler ise o zaman ρ_s sayısı s. mertebeye kadar fonksiyonel olarak bağımsız olan yapı invaryantlarının sayısına eşittir.

$$\mathcal{F}^{(s)} = \mathcal{F}^{(s)}(\theta) = \{T_{\sigma} \mid ord\, \sigma \leq s\}, \quad s = 0, 1, ...,$$

kümesi s. mertebeye kadar tüm yapı fonksiyonlarının ailesini göstersin. Bu durumda $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \mathcal{F}^{(2)}$... dir. O halde yerel olarak $\mathcal{F}^{(s)}$'yi üretecek şekilde ρ_s çoklukta fonksiyonel olarak bağımsız yapı invaryantı $I_\nu = T_{\sigma_\nu}, \nu = 1, ..., \rho_s$ seçilebilir. Yani mertebesi s'den küçük ve eşit olan diğer invaryantları seçilen bu temel invaryantların bir fonksiyonu

$$T_\sigma = H_\sigma \left(I_1, ..., I_{\rho_s}\right), \quad ord\, \sigma \leq s$$

olarak yazmak mümkündür. Buradaki $\left(I_1, ..., I_{\rho_s}\right)$ fonksiyonları $\mathcal{C}^{(s)}$ manifoldu üzerindeki yerel koordinatları ifade eder.

Önerme 4.2.7 θ M manifoldu üzerinde tanımlı tamamen regüler bir eşçatı ve s. mertebeden yapı dönüşümü $\mathbf{T}^{(s)}$'nin rankı ρ_s olsun. $\rho_s = \rho_{s+1}$ eşitliğini sağlayan en küçük s sayısına θ eşçatısının mertebesi denir ve

$$0 \leq \rho_0 < \rho_1 < ... < \rho_s = \rho_{s+1} = \rho_{s+2} = ... = r \leq m$$

dir (Olver 1995). Burada sabit r rankına θ eşçatısının rankı denir.

Bir θ eşçatısının rankı ve mertebesi örnek olarak şöyle hesaplanır: θ eşçatısının yapı fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{F}^{(0)} = \{T^i_{jk}\}$ göz önüne alınsın. ρ_0 sayısı bu eşçatının rankını ya da $\mathcal{F}^{(0)}$ içerisindeki fonksiyonel olarak bağımsız T^i_{jk} yapı fonksiyonlarının sayısını gösterir. $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)}$ kümesinin rankı yani $\mathcal{F}^{(1)}$ içindeki yapı fonksiyonları ve onların birinci mertebeden eşçatı türevleri içinde fonksiyonel olarak bağımsız olanların sayısı $\rho_1 \geq \rho_0$ olsun. Eğer $\rho_1 = \rho_0$ ise o zaman birinci mertebeden tüm eşçatı türevler yapı fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir ve bu durumda θ'nın mertebesi $s = 0$ ve rankı $r = \rho_0$ dır. Dahası (4.2.7) önermesine göre, her $t \geq 0$ için $\rho_t = r = \rho_0$ demek orjinal yapı fonksiyonlarından fonksiyonel olarak bağımsız olan daha yüksek mertebeden türetilmiş invaryant olamaz demektir. Öte yandan $\rho_0 < \rho_1$ ise o zaman $\mathcal{F}^{(2)} \supset \mathcal{F}^{(1)}$ kümesinin rankı ρ_2 hesaplanır. Eğer $\rho_2 = \rho_1$ ise o zaman ikinci ve daha yüksek mertebeden tüm eşçatı türevler, yapı fonksiyonları ve onların birinci mertebeden eşçatı türevleri cinsinden ifade edilebilir ve bu durumda θ'nın mertebesi $s = 1$ ve rankı $r = \rho_1$ dır. Böyle devam edilerek bir eşçatının rankı ve mertebesi hesaplanır. Dolayısıyla bir eşçatının rankı ve mertebesini hesaplama işi pratikte, fonksiyonel olarak bağımsız invaryant bulamayıncaya kadar türev alma işidir.

Teorem 4.2.8 *θ ve $\bar{\theta}$ sırasıyla m-boyutlu M ve $\overline{M}$ manifoldları üzerinde diferensiyellenebilir ve tamamen regüler eşçatılar olsun. O zaman $\Phi^*\bar{\theta} = \theta$ olacak şekilde bir $\Phi : M \to \overline{M}$ yerel difeomorfizminin olması için gerek ve yeter koşul her iki eşçatının da aynı mertebeye sahip olması yani $s = \bar{s}$ olması ve $(s+1)$. mertebeden tasnif manifoldları $\mathcal{C}^{(s+1)}(\theta)$ ve $\mathcal{C}^{(s+1)}\left(\bar{\theta}\right)$ nın çakışmasıdır (Olver 1995).*

4.3. G-değerli Eşdeğerlik Problemi

ω ve $\bar{\omega}$ eşçatılarının G-değerli eşdeğerlik problemi (4.1) ifadesinde de belirtildiği gibi

$$\Phi^* \bar{\omega}^i = g^i_j(x)\omega^j, \quad i = 1, ..., m \tag{4.10}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $g^i_j(x)$ fonksiyonları $g(x)$ matrisinin içerikleridir. $g(x)$ matrisi, $g : M \to G$ fonksiyonun görüntüsüne yani manifoldun her $x \in M$ noktasındaki yapı grubuna ait bir elemandır. Probleme G-değerli denmesinin sebebi budur. Buradaki $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ grubuna eşdeğerlik probleminin yapı grubu denir. Özel olarak $G = \{e\}$ olması durumunda (4.10) ifadesi

$$\Phi^* \bar{\omega}^i = \omega^i, \quad i = 1, ..., m$$

halini alır. Diğer bir ifade ile $\{e\}$-değerli eşdeğerlik problemi ile eşçatıların eşdeğerlik problemi aynıdır. Başka bir uç örnek ise $G = GL(m, \mathbb{R})$ olduğu durumda ortaya çıkar. Yani (4.10) ifadesi herhangi Φ difeomorfizmi için sağlanır ve dolayısıyla herhangi iki eşçatı $GL(m, \mathbb{R})$-eşdeğer olur. Ancak bu iki özel durumla her eşdeğerlik probleminde karşılanmaz.

Teorem 4.3.1 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}^1_{\bar{U}}, ..., \bar{\omega}^m_{\bar{U}})$ *ve* $\omega = (\omega^1_U, ..., \omega^m_U)$ *sırasıyla* $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^m$ *açık altkümeleri üzerinde tanımlı iki eşçatı ve* $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ *olmak üzere her* $x \in U$ *için*

$$\Phi^* \bar{\omega} = g(x)\omega, \qquad g \in G$$

olacak şekilde bir $\Phi : U \to \bar{U}$ *difeomorfizmasının var olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulları sağlayan bir* $\Phi^{(1)} : U \times G \to \bar{U} \times G$ *difeomorfizmasının var olmasıdır (Gardner 1989).*

1. $\Phi^{(1)}\bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\theta} = g\bar{\omega},\ \theta = g\omega$
2. $\begin{tikzcd} U \times G \arrow[r, "\Phi^{(1)}"] \arrow[d, "\pi_U"'] & \bar{U} \times G \arrow[d, "\pi_V"] \\ U \arrow[r, "\Phi"'] & V \end{tikzcd}$ *diyagramı değişmelidir*
3. $\Phi^{(1)}(x, gh) = g\Phi^{(1)}(x, h),\ \forall x \in U,\ g, h \in G.$

Bu teorem vasıtası ile U üzerinde bir G-değerli bir eşdeğerlik problemi $U \times G$ üzerinde eşçatıların eşdeğerlik problemine dönüşür. Ancak problemin taban manifoldu üzerindeki çözümünü bulabilmek için bir dizi "invaryant işlem" (torsiyonun soğurulması ve normalizasyonu) vasıtası ile G yapı grubunu aşikar grup $\{e\}$'ye indirgemek ya da diğer bir ifade ile söz konusu eşdeğerlik problemini taban manifoldu üzerindeki eşçatıların eşdeğerlik problemine indirgemek gerekir. Bunun nedeni, bir önceki bölümde açıklandığı gibi, eşçatıların eşdeğerlik probleminin çözümünün tamamen biliniyor olmasıdır.

M, m-boyutlu bir manifold $(U; x^i)$, M'nin bir yerel koordinat sistemi ve $\omega = (\omega^1, ..., \omega^m)$ U üzerinde bir eşçatı olsun. ω eşçatısının $U \times G$ üzerine lifti

$$\theta = g\omega, \quad \theta^i = g^i_j \omega^j$$

dir. $\theta = g\omega$ ifadesinin her iki tarafının dış türevi alınırsa

$$d\theta = dgg^{-1} \wedge \theta + gd\omega \tag{4.11}$$

elde edilir. $d\omega$, U üzerinde tanımlı bir 2-form olduğundan $d\omega = \omega \wedge \omega$ şeklinde ifade edilebilir. dgg^{-1} 1-form içerikli matrisi ise G üzerinde sağ-invaryant Maurer-Cartan formların matrisidir:

$$\left(dgg^{-1}\right)^i_j = a^i_{j\rho}\pi^\rho.$$

$(\pi)^i_j \equiv \sum_\rho a^i_{j\rho}\pi^\rho$ mod[1] $\theta^1, ..., \theta^m$ Lie cebiri değerli diferensiyel 1-formdur. π^ρ elemanları sağ-invaryant Maurer-Cartan formları için bir taban teşkil eder ve Lie'nin ikinci teoremi gereği $a^i_{j\rho}$ katsayıları sabittir. (4.12) ifadesi koordinat formunda

$$d\theta^i = \sum_{\rho,k} a^i_{j\rho}\pi^\rho \wedge \theta^k + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \gamma^i_{jk}(x, g)\theta^j \wedge \theta^k \tag{4.12}$$

olarak yazılır. γ^i_{jk} katsayılarını içeren terimlere *torsiyon terimleri* γ^i_{jk} katsayılarına da *torsiyon katsayıları* denir. Bu denklemler ne torsiyon katsayılarını ne de π^ρ formlarını tek türlü belirler. Fakat bu belirsizlik torsiyon katsayılarını sadeleştirmek ve hatta mümkünse elimine etmek için kullanılabilir. Bu yapılırken π^i_j elemanlarının Lie cebiri değerli olmaları bozulmayacak şekilde π^ρ elemanları θ^k elemanlarının bir takım fonksiyon katlarıyla modifiye edilir. Yani

$$\pi^\rho \mapsto \pi^\rho + v^\rho_k \theta^k \tag{4.13}$$

elemanlarını (4.12) denkleminde yerine yazarak

$$\gamma^i_{jk} = a^i_{j\rho}v^\rho_k - a^i_{k\rho}v^\rho_j \tag{4.14}$$

denklemlerinden mümkün olan en fazla sayıda denklem çözülmeye çalışılır. Bu işleme *Lie cebiri değerli soğurma* işlemi adı verilir (Gardner 1989). Bu işlem cebirsel olarak şöyle ifade edilir:

(e_i), $V = T_pM$'nin bir tabanı ve $(f^i) \in T^*_pM$'de onun dual tabanı olsun. G grubu M üzerinde etki ettiğinden

$$T_eG \simeq \mathfrak{g} \subset Hom(V, V)$$

[1] $\omega \equiv \alpha$ mod $\theta^1, ..., \theta^m$ demek $\omega = \alpha + \sum a_i\theta^i$ demektir.

olarak düşünülebilir. $(\pi^\rho) \in \mathfrak{g}^*$'ın dual tabanı $(\epsilon_\rho) \in \mathfrak{g}$ göz önüne alınırsa

$$\epsilon_\rho = \sum a^j_{i\rho} e_j \otimes f^i$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \delta : \mathfrak{g} \otimes V^* &\to V \otimes \Lambda^2 V^* \\ \sum v^\rho_k \epsilon_\rho \otimes f^k &\mapsto -\frac{1}{2} \sum (a^i_{j\rho} v^\rho_k - a^i_{k\rho} v^\rho_j) e_i \otimes f^j \wedge f^k \end{aligned}$$

dönüşümüne *torsiyon dönüşümü* ve $H(\mathfrak{g}) = V \otimes \Lambda^2 V^*/im\ \delta$ uzayına *torsiyon uzayı* denir. $\mathfrak{g}^{(1)} := ker\ \delta$ uzayının boyutuna da *belirsizlik derecesi* denir ve σ ile gösterilir. $V \otimes \Lambda^2 V^* \to H(\mathfrak{g})$ izdüşümü $\gamma \mapsto [\gamma]$ için $[\gamma]$ elemanına yani absorbe edilemeyen torsiyon elemanlarına *esas torsiyon* denir. Eğer δ dönüşümü örtense (4.14) sistemi tamamiyle çözülmüş ve dolayısıyla tüm torsiyon terimleri absorbe edilmiş olur ve $U \times G$ üzerinde torsiyonu sıfır olan bir konneksiyon elde edilmiş olur. δ dönüşümü örten değilse yani torsiyonun soğurulması işleminden sonra geride hala grup parametrelerine bağlı torsiyon terimleri kaldıysa o zaman grubun bu terimler üzerindeki etkisine bakılarak torsiyon terimleri uygun bir sabite (genel olarak ± 1 ya da 0) normalize edilir. Kalan torsiyon terimlerinden grup parametrelerine bağlı olmayanlar eşdeğerlik problemi için temel yapı invaryantlarını oluştururlar. Bir $[\gamma_0] \in H(\mathfrak{g})$ torsiyon teriminin uygun bir terime normalize edilmesiyle G yapı grubu söz konusu terimin izotropi grubuna yani $G_1 = \{g \in G\ :\ g[\gamma_0] = [\gamma_0]\}$ grubuna indirgenmiş olur. Eğer torsiyon terimi her $x \in M$ noktası için tek bir orbitte yer alıyorsa ya da bir diğer ifadeyle izotropi grubu taban manifoldunun yerel koordinatlarına bağlı olarak değişmiyorsa o zaman söz konusu orbit içinde yer alan uygun bir nokta sabitlenerek grup parametreleri normalize edilir. Bu tipteki normalizasyona *sabit tipli normalizasyon* denir. Bu durumda yapı grup parametrelerinden birisi diğer parametrelerin bir fonksiyonu olarak yazılarak yapı grubunun boyutu bir eksiltilmiş olur ve taban üzerinde tanımlanmış geometrik yapıyı temsil eden eşçatı bu grupla lift edilerek yapı denklemleri tekrar hesaplanır. Bu döngü ardarda tekrarlandıktan sonra tüm grup parametreleri normalize edilmiş ise yapı grubu $G = \{e\}$ aşikar grubuna indirgenir ve taban manifoldu üzerinde bir invaryant eşçatı elde edilmiş olur. Soğurma ve normalizasyon işlemleri tamamlandıktan sonra yani soğurulması mümkün tüm torsiyon terimleri soğurulup geriye kalan tüm grup parametrelerine bağlı torsiyon terimleri normalize edildikten sonra hala grup parametresi kaldıysa o zaman Cartan'ın involusyon testine başvurulur. $\sigma_1, ..., \sigma_p$ indirgenmiş Cartan karakterleri ve σ belirsizlik derecesi olmak üzere

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + ... + \sigma_p = \sigma \tag{4.15}$$

ise θ eşçatısı involusyondadır denir. Yapı denklemleri (4.12) eşitliğinde yer alan

$$(\pi^i_j) = \sum a^i_{j\rho} \pi^\rho$$

matrisine *tablo matrisi* ve

$$(\pi^i_j) \mod \theta^1, ..., \theta^m$$

matrisine de *indirgenmiş tablo matrisi* denir. *İndirgenmiş Cartan karakterleri* $\sigma_1, ..., \sigma_\rho$ için tümevarımsal tanım şöyle verilir: $\Sigma_0 = \{0\}$ olsun. Her adımda indirgenmiş tablo matrisinin her satırından (mod $\Sigma_0, ..., \Sigma_{k-1}$ e göre) en fazla bir tane eleman seçmek suretiyle oluşturulan bağımsız[2] elemanların kümesi Σ_k ve bu kümenin eleman sayısı σ_k ile gösterilsin. Örnek olarak tüm girdileri bağımsız 1-formlar olan indirgenmiş tablo matrisi göz önüne alınsın:

$$(\pi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

O zaman

$$\Sigma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}, \ \ \Sigma_2 = \{\beta_2\}, \ \ \Sigma_3 = \{\gamma\}$$

ve dolayısıyla

$$\sigma_1 = 3, \ \ \sigma_2 = 1, \ \ \sigma_3 = 1$$

dir. Buradaki Σ_k kümeleri tek türlü belirlenmese de σ_k sayıları tek türlüdür. Eğer Cartan test sağlanmazsa o zaman eşdeğerlik problemi $M^{(1)} = M \times G$ üzerine taşınır. Bu işleme problemin $M \times G$ üzerine genişletilmesi (prolongation) denir. $M^{(1)}$ üzerindeki eşçatı, lift edilmiş θ elemanları ve torsiyonun soğurulması ve normalizasyon döngülerinden sonra geride kalan Maurer-Cartan form elemanlarından oluşur. Genişletilmiş eşçatı $\sigma =$dim$\mathfrak{g}^{(1)}$ tane belirsizlik ya da serbestlik derecesine sahiptir ve bu elemanlar genişletilmiş eşdeğerlik problemi için yapı grubu $G^{(1)}$ için koordinat teşkil ederler. Bu süreçten sonra döngü başa döner ve tüm prosedür tekrar uygulanır. Cartan-Kuranishi Genişletme Teoremine göre sonlu sayıda genişletme işleminden sonra ya involusyonda olan bir eşçatı elde edilir ya da böyle bir eşçatı elde etmek imkansızdır (Kuranishi 1957). Cartan'ın eşdeğerlik metodu ve uygulamaları hakkında detaylı bilgi için bkz. (Gardner 1989), (Olver 1995), (Montgomery 2002).

Teorem 4.3.2 *θ ve $\overline{\theta}$, aynı $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ yapı grubuna sahip m-boyutlu M ve $\overline{M}$ manifoldları üzerinde lift edilmiş analitik eşçatılar olsun. Ayrıca bu eşçatılar için Cartan involusyon test (4.15) sağlansın ve her iki eşçatının yapı denklemlerindeki esas torsiyon terimleri sabit olsun. O zaman θ ve $\overline{\theta}$ eşçatılarının eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul iki eşçatının da aynı sabit esas torsiyona sahip olmasıdır. Dahası, $\sigma_k > 0$ sıfırdan farklı son indirgenmiş Cartan karakter ($\sigma_l = 0, l > k$) ise o zaman (analitik) eşdeğerlik dönüşümleri k değişkenli σ_k fonksiyona bağlıdır (Olver 1995).*

Teorem 4.3.3 *θ ve $\overline{\theta}$, aynı $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ yapı grubuna sahip m-boyutlu M ve $\overline{M}$ manifoldları üzerinde lift edilmiş analitik eşçatılar olsun. Ayrıca bu eşçatılar için Cartan involusyon test (4.15) sağlansın ve her iki eşçatının yapı denklemlerindeki esas torsiyon terimleri ve onların eşçatı türevleri grup parametrelerinden bağımsız olsun. O zaman θ ve $\overline{\theta}$ eşçatılarının eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul iki eşçatının da mertebesinin aynı*

[2]Bu 1-formlardan hiçbirisi mod $\theta^1, ..., \theta^m$'ye göre birbirine denk değildir.

olması ($\bar{s} = s$) *ve* $s + 1$*. mertebeden tasnif manifoldları* $\mathcal{C}^{(s+1)}(\theta)$ *ve* $\mathcal{C}^{(s+1)}(\bar{\theta})$*'nın çakışmasıdır. Dahası, bu özellikteki her (analitik) eşçatının eşdeğerlik dönüşümleri,* $\sigma_k > 0$ *sıfırdan farklı son indirgenmiş Cartan karakter* ($\sigma_l = 0, l > k$) *olmak üzere* k *değişkenli* σ_k *fonksiyona bağlıdır (Olver 1995).*

Örnek 4.3.4 *Yüzeylerin izometrik eşdeğerliği:* $\Phi^* d\bar{s}^2 = ds^2,\ \Phi(x,y) = (\bar{x},\bar{y})$. $M \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve bu yüzey üzerindeki Riemann metriği ya da birinci temel form

$$ds^2 = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dxdy + G(x,y)dy^2 \tag{4.16}$$

ile verilsin. $\omega^1 = \sqrt{E}dx + \frac{F}{\sqrt{E}}dy$ ve $\omega^2 = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}$ formları tanımlanırsa (4.16)

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

olarak yazılır. $\Phi^* d\bar{s}^2 = ds^2$ olabilmesi için iki eşçatı arasındaki ilişki

$$\Phi^* \begin{pmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

olmalıdır. Dolayısıyla $M \times G$ üzerine lift edilmiş eşçatı

$$\theta^1 = \cos\theta\omega^1 - \sin\theta\omega^2,\ \ \theta^2 = \sin\theta\omega^1 + \cos\theta\omega^2$$

elemanlarından oluşur. $d\theta^1$ ve $d\theta^2$ hesaplanırsa

$$d\theta^1 = -\alpha\wedge\theta^2 + P\theta^1\wedge\theta^2,\ \ d\theta^2 = \alpha\wedge\theta^1 + Q\theta^1\wedge\theta^2$$

elde edilir. Burada $\alpha = d\theta$, $SO(2,\mathbb{R})$ üzerindeki Maurer-Cartan formdur. $\pi = \alpha - P\theta^1 - Q\theta^2$ tanımlanarak iki torsiyon terimi de absorbe edilir ve yapı denklemleri

$$d\theta^1 = -\pi\wedge\theta^2,\ \ d\theta^2 = \pi\wedge\theta^1$$

halini alır. Belirsizlik derecesi $\sigma = 0$ olduğundan Maurer-Cartan formu π tek türlü belirlidir. Sıfırdan farklı indirgenmiş Cartan karakteri $\sigma_1 = 1$ olduğundan eşdeğerlik problemi θ^1, θ^2, π 1-formlarıyla $M^{(1)} = M \times G$ üzerine genişletilir ve genişletilmiş yapı denklemleri

$$d\theta^1 = -\pi\wedge\theta^2,\ \ d\theta^2 = \pi\wedge\theta^1,\ \ d\pi = K\theta^1\wedge\theta^2$$

olarak bulunur. $0 = d^2\pi = dK\wedge\theta^1\wedge\theta^2$ olduğundan K fonksiyonu grup parametresi θ'dan bağımsızdır ve dolayısıyla yüzeylerin izometrik eşdeğerlik problemi için skaler invaryanttır. Buradaki K fonksiyonu yüzeyin *Gauss eğriliği* dir.

Örnek 4.3.5 *Yüzeylerin conformal eşdeğerliği:* $\Phi^* d\bar{s}^2 = \lambda^2 ds^2,\ \lambda > 0,\ \Phi(x,y) = (\bar{x},\bar{y})$.

Yine $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi üzerindeki Riemann metriği

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

ile verilsin. $\Phi^* d\bar{s}^2 = \lambda^2 ds^2$ olabilmesi için iki eşçatı arasındaki ilişki

$$\Phi^* \begin{pmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta \\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Dolayısıyla lift edilmiş eşçatı

$$\theta^1 = \lambda\left(\cos\theta\omega^1 - \sin\theta\omega^2\right), \;\; \theta^2 = \lambda\left(\sin\theta\omega^1 + \cos\theta\omega^2\right)$$

şeklinde verilir. Burada yapı grubu iki boyutlu $SO(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ grubudur. $d\theta^1$ ve $d\theta^2$ hesaplanırsa

$$d\theta^1 = \rho \wedge \theta^1 - \alpha \wedge \theta^2 + P\theta^1 \wedge \theta^2, \;\; d\theta^2 = \alpha \wedge \theta^1 + \rho \wedge \theta^1 + Q\theta^1 \wedge \theta^2$$

elde edilir. Burada $\alpha = d\theta$ ve $\rho = d\ln\lambda$, $SO(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ üzerindeki Maurer-Cartan formlardır. Yine $\pi = \alpha - P\theta^1 - Q\theta^2$ tanımlanarak iki torsiyon terimi de absorbe edilir ve yapı denklemleri

$$d\theta^1 = \rho \wedge \theta^1 - \pi \wedge \theta^2, \;\; d\theta^2 = \pi \wedge \theta^1 + \rho \wedge \theta^1$$

halini alır. Burada belirsizlik derecesi $\sigma = 2$ ve indirgenmiş Cartan karakteri $\sigma_1 = 2$ ve $\sigma_2 = 0$ olduğundan $\sigma_1 + 2\sigma_2 = \sigma = 2$ olduğundan Cartan involusyon testi sağlanır. Teorem (4.3.2)'ye göre herhangi iki analitik yüzey conformal olarak eşdeğerdir ve eşdeğerlik dönüşümleri tek değişkenli iki fonksiyonla belirlenir.

5. DİNAMİK SİSTEMLERİN EŞDEĞERLİK PROBLEMİ

Üç boyutlu bir dinamik sistem yerel olarak bi-Hamiltonyen formda ifade edilebildiğinden (Abadoğlu ve Gümral 2009), üç boyutlu dinamik sistemlerin eşdeğerlik probleminin formülasyonu bi-Hamiltonyen yapının tanımlandığı uyumlu Poisson yapılarının eşdeğerliği üzerinden yapılacaktır. Dinamik sistemin integral eğrisine $\mathbb{R}^3$'ün bir S altmanifoldu gözü ile bakılırsa integral eğrisinin üzerindeki her x noktasında $\mathbb{R}^3$'ün teğet demeti $T_x\mathbb{R}^3 = V(x) \oplus H(x)$ ayrışımı ile ifade edilebilir. Burada dikey uzay V integral eğrisinin normal demeti, yatay uzay H ise integral eğrisinin teğet demetidir. Bir önceki bölümde de ifade edildiği gibi, dinamik sistemlerin eşdeğerliği tanımlanırken difeomorfizmanın üzerine koyulacak şart integral eğrisini integral eğrisine taşıması ve uyumlu Poisson yapılarını uyumlu Poisson yapılarına taşımasıdır. Diğer bir ifadeyle Φ difeomorfizmasının türev dönüşümü Φ_*'ın $T\mathbb{R}^3 = V \oplus H$ ayrışımını korumasıdır. Borusal (tubular) komşuluk teoremine göre verilen bir dinamik sistemin integral eğrisinin, integral eğrisinin normal demetine difeomorfik olan $\mathbb{R}^3$ içinde bir komşuluğu vardır (Lee 2003). Bu komşuluğa *borusal komşuluk* denir. Dikey uzay $\pi_*TTS \to TS$ dönüşümünün çekirdeği yani Ker $\pi_*v = 0$ ile tanımlandığından bu difeomorfizmayla integral eğrisi, normal demetin sıfır kesitiyle eşlenir. Bu anlamda verilen dinamik sistem için eşdeğerlik problemini uyumlu Poisson yapılarını uyumlu Poisson yapılarına taşıyacak şekilde borusal komşulukları koruyan bir difeomorfizma ile ifade etmek uygundur. Bu tipte bir difeomorfizmanın Riccati denklemini koruduğu (3.4.) kısmında gösterilmiştir. Yani integral eğrisinin normal demetini koruyan bir difeomorfizma ile Riccati denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden elde edilen uyumlu Poisson vektörleri, başka bir Riccati denkleminin linear bağımsız çözümlerinden elde edilmiş uyumlu Poisson vektörlerine taşınabilir.

5.1. Dinamik Sistemlerin Eşdeğerlik Probleminin Formülasyonu

$\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$'ün U ve $\overline{U}$ açık altkümeleri üzerinde tanımlanan iki dinamik sistem olsun. J^1, J^2 ve $\bar{J}^1, \bar{J}^2$ bu dinamik sistemlerin tanımlandığı uyumlu Poisson 1-formlar olsun yani

$$\begin{aligned} J^i \wedge dJ^i &= 0, \qquad \bar{J}^i \wedge d\bar{J}^i = 0 \\ J^1 \wedge dJ^2 + J^2 \wedge dJ^1 &= 0, \qquad \bar{J}^1 \wedge d\bar{J}^2 + \bar{J}^2 \wedge d\bar{J}^1 = 0 \end{aligned}$$

olsun. $\omega = \psi * (J^1 \wedge J^2)$, $\psi \in C^\infty(M)$ 1-formu tanımlansın. O zaman $\omega_U = (\omega, J^1, J^2)$, U üzerinde bir eşçatı tanımlar. Bu durumda iki dinamik sistemin eşdeğerliği, $\mathbb{R}^3$'ün U ve $\overline{U}$ açık altkümeleri üzerinde tanımlanan $\omega_U = (\omega, J^1, J^2)$ ve $\omega_{\overline{U}} = (\bar{\omega}, \bar{J}^1, \bar{J}^2)$ eşçatılarının

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i \rfloor \Phi^*(\bar{\omega}) &= 0, \\ \Phi^*(\bar{J}^i) \wedge d\Phi^*(\bar{J}^i) &= 0, \\ \Phi^*(\bar{J}^1) \wedge d\Phi^*(\bar{J}^2) + \Phi^*(\bar{J}^2) \wedge d\Phi^*(\bar{J}^1) &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

şartlarını sağlayan eşdeğerlik problemi olarak ifade edilebilir. Burada $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ uyumlu Poisson yapılarından elde edilmiş Poisson vektörlerdir. Tanım gereği $\mathbf{J}_i$ Poisson vektörleri ve J^i Poisson 1-formları aynı bileşenlere sahiptir. $v \rfloor \Phi^*(\bar{J}^i) = (\Phi_* v) \rfloor \bar{J}^i$ ve $v.\mathbf{J}_i = 0$

olduğundan (5.1) şartlarını sağlayan eşçatıların eşdeğerlik probleminin eşdeğerlik grubu

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \middle| \; a(bf - ec) \neq 0 \right\} \tag{5.2}$$

olarak belirlenir. Dolayısıyla, üç boyutlu iki dinamik sistemin eşdeğerlik problemi eşçatıların problemi olarak aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

Teorem 5.1.1 *$\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$'ün U ve $\overline{U}$ açık altkümeleri üzerinde tanımlanan iki dinamik sistem, bu sistemleri temsil eden eşçatılar $\omega_U = (\omega, J^1, J^2)$ ve $\bar{\omega}_{\overline{U}} = (\bar{\omega}, \bar{J}^1, \bar{J}^2)$ olsun. İki dinamik sistemin (5.2) grubu altında eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter şart*

$$\Phi^* \bar{\omega}_{\overline{U}} = g\omega_U, \quad g \in G \subset GL(3, \mathbb{R})$$

şartları sağlayan bir $\Phi : U \to \overline{U}$ difeomorfizmasının var olmasıdır.

5.2. Eşdeğerlik Probleminin Çözümü

ω_U eşçatısının $U \times G$ üzerine lifti

$$\theta = g\omega_U, \quad \theta^i = g^i_j \omega^j$$

göz önüne alınırsa $U \times G$ üzerinde yapı denklemleri

$$d\theta = dgg^{-1} \wedge \theta + gd\omega_U$$

formundadır. $g \in G$ için Maurer-Cartan matrisi dgg^{-1}

$$dgg^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{da}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fdb - edc}{bf - ec} & \frac{-cdb + bdc}{bf - ec} \\ 0 & \frac{fde - edf}{bf - ec} & \frac{-cde + bdf}{bf - ec} \end{pmatrix}.$$

olarak elde edilir. (5.1) ifadesindeki koşullar göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} -cdb + bdc &\equiv 0 \bmod \theta^2, \theta^3 \\ fde - edf &\equiv 0 \bmod \theta^2, \theta^3 \\ fdb - edc - (-cde + bdf) &\equiv 0 \bmod \theta^2, \theta^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla lift edilmiş eşçatı θ için yapı denklemleri

$$d \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1_{23} & T^1_{31} & T^1_{12} \\ T^2_{23} & 0 & T^2_{12} \\ T^3_{23} & T^3_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \theta^3 \wedge \theta^1 \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \end{pmatrix}.$$

şeklinde elde edilir. Uyumluluk şartından yani $d\theta^2 \wedge \theta^3 + d\theta^3 \wedge \theta^2 = 0$ eşitliğinden dolayı $T^2_{12} = -T^3_{31}$ dir. $T^1_{12}, T^1_{13}, T^2_{12}, T^2_{23}$ ve T^3_{23} torsiyon terimleri $\alpha \mapsto \alpha + T^1_{12}\theta^2 - T^1_{31}\theta^3$ ve $\beta \mapsto \beta - T^2_{12}\theta^1 + T^2_{23}\theta^3 - T^3_{23}\theta^2$ şeklinde modifiye edilerek soğurulur. Soğurma etme işleminin ardından yapı denklemleri

$$d\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}T^1_{23} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^2\wedge\theta^3\\ \theta^3\wedge\theta^1\\ \theta^1\wedge\theta^2\end{pmatrix},$$

halini alır. $T^1_{23} \neq 0$ ise Bu adımdan sonra yapı grubunu indirgemek amacıyla geriye kalan torsiyon terimleri T^1_{23} normalize edebilmek için grubun bu terimler üzerindeki etkisine bakılır. Dolayısıyla $T^1_{23} = 0$ ve $T^1_{23} \neq 0$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekir.

I. Durum $T^1_{23} = 0$.

Teorem 5.2.1 *U üzerinde verilen bir dinamik sistemi temsil eden 5 boyutlu manifold $U \times G$ üzerine yukarıdaki gibi lift edilmiş ve grup parametresinden bağımsız aynı esas torsiyon değerine sahip herhangi iki analitik eşçatı yerel olarak eşdeğerdir ve eşdeğerlik dönüşümleri tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenir.*

İspat. $T^1_{23} = 0$ ise o zaman yapı denklemleri

$$d\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

sistemine indirgenir. İndirgenmiş Cartan karakterleri $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$ ve belirsizlik derecesi $\sigma = 1$ olduğundan Cartan testi sağlanmaz ve dolayısıyla problemi genişletmek gerekir. Yapı grubunu genişletirken belirsizlik derecesi yeni oluşturulacak yapı grubu için koordinat olarak kullanılır. $\alpha \mapsto \alpha + \lambda\theta^1$ dönüşümü altından yapı denklemlerini invaryant kaldığından eşdeğerlik problemi $U \times G \times G^{(1)}$ üzerine taşınır. Burada $G^{(1)}$ genişletilmiş eşdeğerlik probleminin yapı grubudur ve $U \times G$ üzerindeki eşçatı $U \times G \times G^{(1)}$ üzerine

$$\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\\ \hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

şeklinde lift edilir. (5.3) yapı denklemlerinden $d\alpha \wedge \theta^1 = 0$, $d\beta \wedge \theta^2 = 0$ ve $d\beta \wedge \theta^3 = 0$ elde edilir. Yani $d\alpha = \xi \wedge \theta^1$ ve $d\beta = f\theta^2 \wedge \theta^3$ formundadır. (5.4) için yapı denklemleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \hat{\alpha} \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \hat{\beta} \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \hat{\beta} \wedge \theta^3 \\ d\hat{\alpha} &= \rho \wedge \theta^1 + \lambda\hat{\alpha} \wedge \theta^1 + \xi \wedge \theta^1 \\ d\hat{\beta} &= f\theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\rho = d\lambda$, $G^{(1)}$ üzerindeki Maurer-Cartan formdur.

$$\rho \mapsto \rho - \lambda\hat{\alpha} - \xi \tag{5.5}$$

dönüşümüyle $d\hat{\alpha}$ içindeki θ^1 ile çarpılan torsiyon terimleri absorbe edilebilir. Soğurma işleminden sonra yapı denklemleri

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \hat{\alpha} \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= \hat{\beta} \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \hat{\beta} \wedge \theta^3 \\ d\hat{\alpha} &= \rho \wedge \theta^1 \\ d\hat{\beta} &= f\theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned}$$

halini alır. $d^2\hat{\beta} = 0$ kullanılırsa

$$0 = (df + 2f\hat{\beta}) \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \tag{5.6}$$

eşitliğinden f terimininin $G^{(1)}$ grubunun parametresinden bağımsız olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla f fonksiyonunu $G^{(1)}$ etkisiyle normalize etmek mümkün değildir ve f fonksiyonu problemin invaryantıdır. İndirgenmiş Cartan karakterleri $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ ve belirsizlik derecesi $\sigma = 1$ olduğundan

$$\sigma_1 = \sigma = 1$$

Cartan testi sağlanır ve (4.3.3) teoremine göre ispat biter. ∎

II. Durum $T^1_{23} \neq 0$.

Bu durumda yapı grubunun T^1_{23} terimi üzerindeki etkisini belirlemek ve T^1_{23} terimini uygun bir sabite normalize etmek için $d^2\theta^1$ hesaplanırsa

$$0 = d\alpha \wedge \theta^1 - T^1_{23}\alpha \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 + dT^1_{23} \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 + 2T^1_{23}(\beta \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 + T^2_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3)$$

elde edilir. θ^1 ile dış çarpımı alınırsa

$$0 = (dT^1_{23} + 2T^1_{23}\beta - T^1_{23}\alpha) \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$$

bulunur. Dolayısıyla

$$dT^1_{23} \equiv T^1_{23}(\alpha - 2\beta) \text{ mod } \theta^1, \theta^2, \theta^3$$

elde edilir. Yani eşdeğerlik grubu T^1_{23} terimi üzerinde ölçeklemeyle etki eder. Dolayısıyla $T^1_{23} \mapsto 1$ normalizasyonu yapılırsa o zaman

$$\alpha \equiv 2\beta \text{ mod } \theta^1, \theta^2, \theta^3$$

sonucuna ulaşılır. Yapı denklemleri tekrar hesaplanırsa

$$d\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & q & p \\ s & 0 & h \\ k & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \theta^3 \wedge \theta^1 \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

elde edilir. Buradaki torsiyon terimlerini eşzamanlı olarak soğurmak mümkün değildir. Ancak şöyle bir gözlem yapmak mümkündür:

$$2\beta \mapsto 2\beta + (p + 2k)\theta^2 + (q + 2s)\theta^3 + 2(r + h)\theta^1$$

dönüşümü torsiyon uzayını invaryant bırakır ve dolayısıyla $p = -2k, q = -2s$, $r = -h$ olacak şekilde torsiyon terimlerini düzenlemek mümkündür. Böylece yapı denklemleri

$$d\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2s & -2k \\ s & 0 & h \\ k & -h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \theta^3 \wedge \theta^1 \\ \theta^1 \wedge \theta^2 \end{pmatrix}$$

halini alır. $\beta \mapsto \hat{\beta} - h\theta^1 - k\theta^2 + s\theta^3$ tanımlanırsa tüm torsiyon terimleri absorbe edilir ve yapı denklemleri yapı denklemleri

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= 2\hat{\beta} \wedge \theta^1 + \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= \hat{\beta} \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \hat{\beta} \wedge \theta^3 \end{aligned} \tag{5.8}$$

haling alır. $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0$ olduğundan Cartan involusyon testi sağlanmaz. Belirsizlik derecesi $\sigma = 0$ olduğundan, problem $d\hat{\beta}$ hesaplanarak $U \times G$ üzerine genişletilir. $d^2\theta^1 = 0$ hesaplanırsa $d\hat{\beta} \wedge \theta^1 = 0$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} d\hat{\beta} \wedge \theta^2 &= 0 \\ d\hat{\beta} \wedge \theta^3 &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $d\hat{\beta} = 0$ elde edilir. Bu durumda yapı denklemleri $U \times G$ üzerinde

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= 2\hat{\beta} \wedge \theta^1 + \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= \hat{\beta} \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= \hat{\beta} \wedge \theta^3 \\ d\hat{\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

halini alır ve dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 5.2.2 *$U \times G$ üzerinde (5.9) yapı denklemlerini sağlayan herhangi iki analitik eşçatı ve dolayısıyla herhangi iki dinamik sistem eşdeğerdir ve eşdeğerlik dönüşümleri tek değişkenli bir fonksiyon ile belirlenir.*

Dinamik sistemlerin eşdeğerlik probleminin taban manifoldu üzerindeki çözümünü bulmak için (5.9) yapı denklemleri, e, G grubunun birim elemanı ve $x \in U$ olmak üzere (x, e) noktasında hesaplansın. (x, e) noktasında $\beta \equiv 0$ olduğundan (5.9) yapı denklemleri U üzerinde

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -2k\theta^1 \wedge \theta^2 - 2s\theta^3 \wedge \theta^1 + \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= s\theta^2 \wedge \theta^3 + h\theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= k\theta^2 \wedge \theta^3 - h\theta^3 \wedge \theta^1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

halini alır. Dolayısıyla U üzerinde

$$\hat{\beta} \equiv h\theta^1 + k\theta^2 - s\theta^3$$

flat konneksiyonu elde edilmiş olur. Burada $k,\ s$ ve h fonksiyonları problemin temel invaryantlarıdır.

Eğer $h = 0$ ise o zaman $d\hat{\beta} = 0$ olduğundan

$$dk \wedge \theta^2 + k\hat{\beta} \wedge \theta^2 - ds \wedge \theta^3 - s\hat{\beta} \wedge \theta^3 = 0$$

elde edilir. Bu denklemin sırasıyla θ^2 ve θ^3 ile dış çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} dk &= 0, \ \text{mod } \theta^2, \theta^3 \\ ds &= 0, \ \text{mod } \theta^2, \theta^3 \end{aligned} \tag{5.11}$$

bulunur. Ayrıca $d\theta^1$'in dış türevi alınırsa o zaman invaryantların sağlaması gereken şart

$$\frac{\partial k}{\partial \theta^3} = -\frac{\partial s}{\partial \theta^2}$$

kısmi türevli diferensiyel denklemi olarak verilir. (5.11) denklemlerinden görüldüğü üzere problemin temel yapı invaryantları k ve s fonksiyonları dinamik sistemin korunan nicelikleri yani sadece Hamiltonyenlere bağlı fonksiyonlardır. Dolayısıyla $h = 0$ olması durumunda θ eşçatısının rankı en fazla 2 ve mertebesi 0 dır. rank $= 2$ ise tüm türetilmiş invaryantlar sıfırıncı mertebeden olan s ve k invaryantları cinsinden yazılabilirler. rank $= 1$ ise o zaman $k = f(s)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır. rank $= 0$ ise tüm yapı invaryantları sabittir.

Lemma 5.2.3 *M, m-boyutlu bir manifold ve $\theta = (\theta^1, ..., \theta^m)$, M üzerinde bir eşçatı olsun. O zaman θ eşçatısını koruyacak difeomorfizmaların bir (yerel) Lie grubu G en fazla m boyutludur. Bu Lie grubunun boyutunun m olması için gerek ve yeter koşul*

$$d\theta^i = \sum C^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$$

yapı denklemlerindeki tüm C^i_{jk} fonksiyonlarının sabit olmasıdır. Bu durumda C^i_{jk} sabitleri G grubunun yapı sabitleridir ve G grubu M üzerinde serbest ve geçişmeli olarak etki eder ve θ eşçatısı M üzerindeki sağ(sol) invaryant Maurer-Cartan formlarla eşlenir (Gardner 1989), (Montgomery 2002).

$h = 0$ durumunda (5.9) yapı denklemleri taban manifoldu U üzerinde

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -2k\theta^1 \wedge \theta^2 - 2s\theta^3 \wedge \theta^1 + \theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^2 &= s\theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= k\theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \tag{5.12}$$

formunda olduğundan k ve s sabit ise lemma (5.2.3) göre $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ eşçatısını koruyan difeomorfizmalar grubunun boyutu 3'e eşittir ve (5.12) yapı denklemleri 3 boyutlu bir (yerel) Lie grubunun yapı denklemleridir. Ancak bu durum $k = 0, s \neq 0$ ya da $s = 0, k \neq 0$ ya da $k = s = 0$ olduğu durumda gerçekleşir. Yapı invaryantlarının ikisinin de sıfır olduğu durumda yapı denklemleri Heisenberg cebirinin yapı denklemlerini verir. Dolayısıyla dinamik sistemin tanımlandığı 3-boyutlu manifold yerel olarak Heisenberg grubuna difeomorfiktir.

$h = 0$ durumunu daha yakından incelemek yerinde olacaktır. Bu amaçla yerel olarak

$$v = \phi\nabla H_1 \times \nabla H_2 \tag{5.13}$$

formundaki bir dinamik sistem göz önüne alınsın. (5.13) dinamik sisteminin tanımlandığı uyumlu Poisson yapıları yerel olarak

$$\mathbf{J}_1 = \phi\nabla H_1, \quad \mathbf{J}_2 = -\phi\nabla H_2$$

formunda ifade edilebilir (Abadoğlu ve Gümral 2009). Bu durumda (5.13) dinamik sistemi uyumlu Poisson yapıları cinsinden

$$v = \mathbf{J}_1 \times \nabla H_2 = \mathbf{J}_2 \times \nabla H_1$$

şeklinde ifade edilir. $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_2$ Poisson vektörlerine karşılık gelen θ^2, θ^3 Poisson 1-formları ve dinamik sistemi belirleyen v vektör alanına karşılık gelen θ^1 diferensiyel 1-formu

$$\theta^2 = \phi dH_1, \;\; \theta^3 = -\phi dH_2, \;\; \theta^1 = \phi * (dH_1 \wedge dH_2)$$

şeklinde tanımlıdır. θ^2 ve θ^3 formlarının dış türevi alınırsa

$$d\theta^2 = d\phi \wedge dH_1, \;\; d\theta^3 = -d\phi \wedge dH_2$$

elde edilir. Eşçatı türevleri

$$\frac{\partial}{\partial \theta^1} = \frac{1}{\|v\|^2}\mathcal{L}_v, \;\; \frac{\partial}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial H_1}, \;\; \frac{\partial}{\partial \theta^3} = -\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial H_2}$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned} d\theta^2 &= \frac{\mathcal{L}_v \phi}{\phi\|v\|^2}\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{\phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial H_2}\theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= -\frac{\mathcal{L}_v \phi}{\phi\|v\|^2}\theta^3 \wedge \theta^1 + \frac{1}{\phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial H_1}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.10) yapı denklemleri göz önüne alınırsa h fonksiyonunun

$$h = \frac{\mathcal{L}_v \phi}{\phi\|v\|^2} \tag{5.15}$$

şeklinde tanımlı olduğu görülür. Eğer $h = 0$ ise o zaman (5.15) eşitliğinden $\mathcal{L}_v \phi = 0$ olduğu görülür. Yani ϕ fonksiyonu sadece Hamiltonyenlere bağlı bir fonksiyondur. Böylece problemin invaryantları s ve k, Hamiltonyenler cinsinden

$$s = \frac{1}{\phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial H_2}, \;\; k = \frac{1}{\phi^2}\frac{\partial \phi}{\partial H_1}$$

şeklinde ifade edilir. Aslında bu durum

$$v = \phi \nabla H_1 \times \nabla H_2$$

vektör alanının diverjansının sıfıra eşit olup olmamasıyla alakalıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \nabla . v &= \nabla \phi . (\nabla H_1 \times \nabla H_2) + \phi(\nabla H_2 . \nabla \times \nabla H_1 - \nabla H_1 . \nabla \times \nabla H_2) \\ &= \nabla \phi . (\nabla H_1 \times \nabla H_2) \\ &= \frac{1}{\phi}\mathcal{L}_v \phi \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{L}_v \phi = 0$ ise o zaman v vektör alanının diverjansı sıfırdır. Dolayısıyla, 3-boyutlu otonom bir dinamik sistem diverjansı sıfır olan bir vektör alanıyla belirleniyorsa bu durumda $h = 0$ olacağından dinamik sistemin taşıdığı invaryantlar sadece Hamiltonyenler cinsinden ifade edilebilir. Flat konneksiyon $\hat{\beta}$'nın içinde θ^1 terimi bulunup bulunmaması vektör alanının diverjansının sıfırdan farklı olup olmamasına bağlıdır. 3-boyutlu dinamik sistemlerin eşdeğerlik probleminin çözümü aşağıdaki iki teoremle ifade edilir:

Teorem 5.2.4 *$\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$'ün U ve $\overline{U}$ açık altkümeleri üzerinde tanımlanan diverjansı sıfir olan iki dinamik sistem olsun. Yani $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ ve $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3)$ bu iki dinamik sistemi temsil eden ve (5.12) yapı denklemlerini sağlayan eşçatılar olsun. $\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ dinamik sistemlerinin (5.2) grubu altında eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul θ ve $\bar{\theta}$ eşçatılarının eşdeğer olması yani $\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ dinamik sistemlerinin Hamiltonyen fonksiyonlarının fonksiyonel olarak bağımlı olmasıdır.*

Teorem 5.2.5 *$\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$'ün U ve $\overline{U}$ açık altkümeleri üzerinde tanımlanan iki dinamik sistem olsun. $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ ve $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3)$ bu iki dinamik sistemi temsil eden ve (5.10) yapı denklemlerini sağlayan eşçatılar olsun. $\dot{x} = v$ ve $\dot{\bar{x}} = \bar{v}$ dinamik sistemlerinin (5.2) grubu altında eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul θ ve $\bar{\theta}$ eşçatılarının eşdeğer olmasıdır.*

5.3. Riccati Denkleminin Eşdeğerlik Problemi

Bir önceki bölümde bir dinamik sistemi temsil eden bir $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ eşçatısı tanımlanıp bu eşçatının yapı invaryantları hesaplanmıştı. Riccati denklemi

$$\partial_{y^1}\mu = \hat{e}_2.\nabla \times \hat{e}_2 + \mu\left(\hat{e}_2.\nabla \times \hat{e}_3 + \hat{e}_3.\nabla \times \hat{e}_2\right) + \mu^2 \hat{e}_3.\nabla \times \hat{e}_3, \tag{5.16}$$

(3.13) şeklinde tanımlı holonomik olmayan (y^1, y^2, y^3) Frenet-Serret koordinatlarında ifade edildiğinden bu denklemi temsil eden kontakt form

$$\omega^0 = d\mu - \zeta_i \theta^i, \tag{5.17}$$

şeklinde alınabilir. Burada ζ_1 koordinatı (5.16) denkleminin sağ tarafının bir fonksiyon katına eşittir. Birinci mertebeden kısmi türevli bir diferensiyel denklem olan Riccati denklemi (5.16) geometrik olarak şu şekilde ifade edilir:

(y^1, y^2, y^3) $\mathbb{R}^3$'ün bir yerel koordinat sistemi olsun ve $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aşikar demeti göz önüne alınsın. μ, $\mathbb{R}$ lifi üzerindeki yerel koordinat olmak üzere π demetinin kesitlerinin 1-jetlerinin Öklid uzayı $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ile gösterilsin. $(y^1, y^2, y^3, \mu, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$'ün yerel koordinatları olarak alınırsa π demetinin her yerel kesiti $(y, \mu(y))$ için karşılık gelen 1-jet $(y^1, y^2, y^3, \mu, \xi_1 = \partial_{y^1}\mu, \xi_2 = \partial_{y^2}\mu, \xi_3 = \partial_{y^3}\mu) = j_1(\mu)$ ile gösterilsin. $f : J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$f = \partial_{y^1}\mu - \hat{e}_2.\nabla \times \hat{e}_2 + \mu\left(\hat{e}_2.\nabla \times \hat{e}_3 + \hat{e}_3.\nabla \times \hat{e}_2\right) + \mu^2 \hat{e}_3.\nabla \times \hat{e}_3,$$

fonksiyonu ile (5.16) denklemi

$$S = \left\{ j_1(\mu) \in J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f(j_1(\mu)) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Saunders 1979). π'nin tüm yerel kesitlerinin 1-jetleri üzerinde sıfır olan diferensiyel 1-forma $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ üzerinde *kontakt form* denir. Yani kontakt form her μ yerel kesiti için $j_1(\mu)^*\omega^0 = 0$ eşitliğini sağlayan diferensiyel formdur. Kontakt formun yerel koordinatlardaki ifadesi

$$\omega^0 = d\mu - \zeta_i\theta^i = d\mu - \xi_i dy^i,$$

şeklide verilir. ζ_i ve ξ_i terimleri arasındaki ilişki

$$\theta^i = \lambda^i_k dy^k, \quad \zeta_i = \frac{\partial\mu}{\partial\theta^i}, \quad \xi_i = \frac{\partial\mu}{\partial y^i}$$

olduğundan

$$\xi_k = \lambda^i_k \zeta_i$$

şeklindedir. Buradaki (λ^i_k) matrisi bir önceki bölümde ifade edilen eşçatıların eşdeğerlik probleminin yapı grubuna ait yani

$$(\lambda^i_k) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

formunda bir matristir. Jet koordinatları

$$\bar{\xi}_i = \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y^j} + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\xi_j\right)\frac{\partial y^j}{\partial\bar{y}^i}$$

şeklinde dönüştüğünden kontakt form $\omega^0 = d\mu - \zeta_i\theta^i$, bir $\Phi_\mu : J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ difeomorfizması altında korunur:

$$\Phi^*_\mu\bar{\omega}^0 = \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\omega^0$$

Gerçekten

$$d\bar{\mu} = \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y^i}dy^i = \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\theta^i}\theta^i$$

göz önüne alınırsa

$$\theta^i = \lambda^i_j dy^j, \quad \frac{\partial}{\partial\theta^j} = (\lambda^i_j)^{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_i d\bar{y}^i &= \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y^j} + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\xi_j\right) dy^j \\ &= \lambda_j^k \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\theta^k} + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\zeta_k\right) dy^j \\ &= \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\theta^k} + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\zeta_k\right) \theta^k\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}d\bar{\mu} - \bar{\zeta}_i\bar{\theta}^i = d\bar{\mu} - \bar{\xi}_i d\bar{y}^i &= \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\theta^k}\theta^k - \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\theta^k} + \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}\zeta_k\right)\theta^k \\ &= \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu}(d\mu - \zeta_i\theta^i)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Riccati denklemi için elde edilen dönüşüm kuralı (3.19) ile verildiğinden $\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\mu} \neq 0$ dır. Dolayısıyla Riccati denkleminin

$$\Phi_\mu^*\bar{\omega}^0 = a_0\omega^0, \quad \text{ve} \quad \Phi_\mu^*\bar{\theta}^i = \theta^i \tag{5.18}$$

şartlarını sağlayan, yani kontakt formu ve dinamik sistemi koruyacak bir Φ_μ difeomorfizması altındaki eşdeğerlik problemi tanımlanabilir. Buradan hareketle bu eşdeğerlik problemi

$$\begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \theta \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

eşçatılarının eşdeğerlik problemi olarak ifade edilir. Burada θ çatısı dinamik sistemi temsil eden yani (5.10) ya da (5.12) yapı denklemlerini sağlayan bir eşçatı ve θ^0 1-formu da kontakt formun liftidir. (5.12) yapı denklemlerini sağlayan eşçatı göz önüne alınarak devam edilsin.

Teorem 5.3.1 *Herhangi iki analitik Riccati denklemi, (5.18) şartlarını sağlayan bir kontakt difeomorfizma altında eşdeğerdir ve eşdeğerlik dönüşümleri tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenir.*

İspat. Lift edilmiş eşçatı için yapı denklemleri

$$\begin{aligned}d\theta^0 &= \eta\wedge\theta^0 + a_0 d\omega^0, \quad \eta = \frac{da_0}{a_0} \\ d\theta &= \theta\wedge\theta\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= -\frac{\zeta_{1,\mu}}{a_0}\theta^0\wedge\theta^1 - \frac{\zeta_{2,\mu}}{a_0}\theta^0\wedge\theta^2 - \frac{\zeta_{3,\mu}}{a_0}\theta^0\wedge\theta^3 \\ &+ \big(\zeta_2\zeta_{1,\mu} - \zeta_1\zeta_{2,\mu} + (\zeta_{1,2} - \zeta_{2,1}) + 2k\zeta_1\big)\,\theta^1\wedge\theta^2 \\ &+ \big(\zeta_1\zeta_{3,\mu} - \zeta_3\zeta_{1,\mu} + (\zeta_{3,1} - \zeta_{1,3}) + 2s\zeta_1\big)\,\theta^3\wedge\theta^1 \\ &+ \big(\zeta_3\zeta_{2,\mu} - \zeta_2\zeta_{3,\mu} + (\zeta_{2,3} - \zeta_{3,2}) - \zeta_1 - s\zeta_2 - k\zeta_3\big)\,\theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla lift edilmiş eşçatı için yapı denklemleri

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \eta\wedge\theta^0 + \chi_3\theta^1\wedge\theta^2 + \chi_2\theta^3\wedge\theta^1 + \chi_1\theta^2\wedge\theta^3 \\ &- \zeta_{1,\mu}\theta^0\wedge\theta^1 - \zeta_{2,\mu}\theta^0\wedge\theta^2 - \zeta_{3,\mu}\theta^0\wedge\theta^3 \\ d\theta^1 &= 2k\theta^1\wedge\theta^2 + 2s\theta^3\wedge\theta^1 + \theta^2\wedge\theta^3 \\ d\theta^2 &= -s\theta^2\wedge\theta^3 \\ d\theta^3 &= -k\theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned} \tag{5.20}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \chi_3 &= a_0\big(\zeta_2\zeta_{1,\mu} - \zeta_1\zeta_{2,\mu} + (\zeta_{1,2} - \zeta_{2,1}) + 2k\zeta_1\big) \\ \chi_2 &= a_0\big(\zeta_1\zeta_{3,\mu} - \zeta_3\zeta_{1,\mu} + (\zeta_{3,1} - \zeta_{1,3}) + 2s\zeta_1\big) \\ \chi_1 &= a_0\big(\zeta_3\zeta_{2,\mu} - \zeta_2\zeta_{3,\mu} + (\zeta_{2,3} - \zeta_{3,2}) - \zeta_1 - s\zeta_2 - k\zeta_3\big) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. θ^0 ile çarpılan terimler, η 1-formu

$$\eta \mapsto \eta - \zeta_{1,\mu}\theta^1 - \zeta_{2,\mu}\theta^2 - \zeta_{3,\mu}\theta^3 \tag{5.21}$$

şeklinde modifiye edilerek absorbe edilebilir. Soğurma işlemlerinin ardından yapı denklemleri

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \eta\wedge\theta^0 + \chi_3\theta^1\wedge\theta^2 + \chi_2\theta^3\wedge\theta^1 + \chi_1\theta^2\wedge\theta^3 \\ d\theta^1 &= 2k\theta^1\wedge\theta^2 + 2s\theta^3\wedge\theta^1 + \theta^2\wedge\theta^3 \\ d\theta^2 &= -s\theta^2\wedge\theta^3 \\ d\theta^3 &= -k\theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned} \tag{5.22}$$

halini alır.

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \chi_1\theta^2\wedge\theta^3 \mod \theta^0,\theta^1 \\ d\theta^0 &= \chi_2\theta^3\wedge\theta^1 \mod \theta^0,\theta^2 \\ d\theta^0 &= \chi_3\theta^1\wedge\theta^2 \mod \theta^0,\theta^3 \end{aligned} \tag{5.23}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d\chi_1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 &\equiv 0 \text{ mod } \theta^0, \theta^1 \\ d\chi_2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^1 &\equiv 0 \text{ mod } \theta^0, \theta^2 \\ d\chi_3 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 &\equiv 0 \text{ mod } \theta^0, \theta^3 \end{aligned} \tag{5.24}$$

sonucuna bulaşılır. Dolayısıyla χ_i terimleri grup parametresi a_0 dan bağımsızdır. χ_i terimlerinin a_0'a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta_2\zeta_{1,\mu} - \zeta_1\zeta_{2,\mu} + (\zeta_{1,2} - \zeta_{2,1}) + 2k\zeta_1 \\ 0 &= \zeta_1\zeta_{3,\mu} - \zeta_3\zeta_{1,\mu} + (\zeta_{3,1} - \zeta_{1,3}) + 2s\zeta_1 \\ 0 &= \zeta_3\zeta_{2,\mu} - \zeta_2\zeta_{3,\mu} + (\zeta_{2,3} - \zeta_{3,2}) - \zeta_1 - s\zeta_2 - k\zeta_3 \end{aligned}$$

integreedilebilirlik koşulu elde edilir. İndirgenmiş Cartan karakterleri $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ ve belirsizlik derecesi $\sigma = 1$ olduğundan Cartan involusyon testi sağlanır. ∎

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında 3-boyutlu bir manifold üzerinde tanımlı bir otonom dinamik sistem için yerel eşdeğerlik problemi Cartan'ın eşdeğerlik metodu kullanılarak ele alınmıştır. 3-boyutlu manifold üzerinde tanımlı bir otonom dinamik sistem yerel olarak bi-Hamiltonyen formda ifade edilebildiğinden (Abadoğlu ve Gümral 2009), ilk olarak eşdeğerlik problemi bi-Hamiltonyen yapıyı belirleyen uyumlu Poisson yapılarının eşdeğerliği üzerinden formüle edilerek dinamik sistemi ifade eden bir eşçatı tanımlanmış ve problem eşçatılar için eşdeğerlik problemine indirgenmiştir. Sonrasında eşdeğerlik grubunu inşa edebilmek için, Frenet-Serret çatısının genel bir difeomorfizma altındaki davranışı göz önüne alınmış ve Frenet-Serret çatısında yazılan bir Poisson vektörü için Jacobi özdeşliğini temsil eden Riccati denkleminin dönüşüm kuralı belirlenmiştir. Bunun yanı sıra Jacobi özdeşliğinin belirli bir özelliğe sahip keyfi bir çatıda ifade edilen bir Poisson vektörü için de Riccati denklemiyle ifade edilebileceği gösterilmiştir. Buradan hareketle uyumlu Poisson yapılarını uyumlu Poisson yapılarına dönüştüren difeomorfizmalar altında Riccati denkleminin formunun da korunduğu görülmüştür. Otonom dinamik sistemler için eşdeğerlik probleminin çözümü, dinamik sistemin integral eğrisi yönündeki diferensiyel 1-form θ^1'in integre edilip edilememesiyle yani $d\theta^1 \wedge \theta^1 = 0$ ve $d\theta^1 \wedge \theta^1 \neq 0$ durumlarıyla belirlenen iki dala ayrılmıştır. İntegre edilebilir durum için genişletilmiş herhangi iki analitik eşçatının ve dolayısıyla genişletilmiş herhangi iki analitik dinamik sistemin tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenen bir difeomorfizma sınıfı ile her zaman birbirine dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. $d\theta^1 \wedge \theta^1 \neq 0$ durumunda ise yine genişletilmiş herhangi iki analitik dinamik sistemin tek değişkenli bir fonksiyonla belirlenen bir difeomorfizma sınıfı yolu ile her zaman birbirine dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. İntegre edilemez durum için problem taban manifoldu üzerine indirgenerek, problemin temel yapı invaryantlarının sayısının ve integral eğrisi üzerindeki koordinata bağlılığının dinamik sistemi belirleyen vektör alanının diverjasının sıfır olup olmamasına göre belirlendiği gösterilmiştir. Diverjansı sıfır olan bir vektör alanı için taban manifoldu üzerinde bileşenleri Hamiltonyenlerin fonksiyonlarına karşılık gelen bir flat konneksiyon tanımlanmıştır. Buna göre problemin temel yapı invaryantlarının ve onların eşçatı türevlerinin dinamik sistemin akış eğrisi boyunca değişmediği, diğer bir ifadeyle, Hamiltonyenler cinsinden yazılabileceği gösterilmiş ve dolayısıyla iki dinamik sistemin eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter şartların sadece Hamiltonyen fonksiyonlarına bağlı olarak belirleneceği gösterilmiştir. Diverjansın sıfırdan farklı olduğu durumda da taban manifoldu üzerinde bir flat konneksiyon elde edilmiş ve problemi temsil eden eşçatının yapı denklemleri hesaplanmıştır. Yapı invaryantlarının tamamının sıfır olması durumunda ise yapı denklemleriyle belirlenen Lie cebiri Heisenberg cebirine izomorfik olduğu ve dolayısıyla problemin tanımlandığı manifoldun yerel olarak Heisenberg grubu olduğu ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasının son bölümünde ise Riccati denkleminin dinamik sistemi temsil eden eşçatıyı koruyacak bir kontakt difeomorfizma altındaki eşdeğerlik problemi, Cartan'ın eşdeğerlik metodu vasıtasıyla ele alınmış ve herhangi iki Riccati denkleminin bu tipte bir difeomorfizma sınıfı yolu ile birbirine dönüştürülebileceği gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

ABADOĞLU, E. and GÜMRAL, H. 2009. Bi-Hamiltonian structure in Frenet-Serret Frame. *Physica D*, 238: 526-530.

ADLER, M., MOERBEKE, P. V. and VANHAECKE, P. 2004. Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras, Springer, New York.

ARNOLD, V. I. 1983. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag New York Inc.

BRYANT, R. L., CHERN, S. S., GARDNER, R. B., GOLDSCHMIDT, H. L. Goldschmidt, and GRIFFITHS, P. 1991. Exterior differential systems, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 18, Springer-Verlag, New York.

CARTAN, E. 1924. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Sociét é Mathématique de France*, 52: 205-241.

CARTAN, E. 1955. Les problèmes d'équivalences, Oeuvres Complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris.

CARTAN E. 1932 Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes. I, *Ann. Math. Pura Appl.* (4) 11 17-90 (or Oeuvres. II, 2, 1231-1304); II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2) 1 (1932), 333-354 (or Oeuvres. III, 2,1217-1238).

CHERN, S. S., CHEN, W. H., and LAM, K. S. 2000. Lectures on Differential Geometry, Series on University Mathematics, vol.1, World Scientific.

CZYZYCKI, T., HRIVNÁK, J. 2010. Equivalence problem and integrability of the Riccati equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 17(3): 389.

EHLERS, K. 2002. Geometric Equivalence on Nonholonomic Three-Manifolds, *Proceedings of the fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, Wilmington, NC, USA. Springer, New York.

FELS, M. E. 1995. The Equivalence Problem for Systems of Second-Order Ordinary Differential Equations, *Proc. London Math. Soc.*, 71 (1): 221-240.

GARDNER, R. B. 1989. The method of equivalence and its applications, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 58, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, Philadelphia, PA.

GARDNER, R. B. and SHADWICK, W. F. 1987. Feedback equivalence of control systems, *Systems and Control Letters*, 8, 5: 463-465.

GARDNER, R. B. and SHADWICK, W. F. 1991. An equivalence problem for a two-form and a vector field on $\mathbb{R}^3$, *Differential geometry, global analysis, and topology (Halifax, NS, 1990), CMS Conf. Proc. Amer. Math. Soc. 12: 41-50, American Mathematical Society*, Providence, RI.

GÜMRAL, H. and NUTKU, Y. 1993. Poisson structure of dynamical systems with three degrees of freedom. *Journal of Mathematical Physics*, 34, (12): 5691-5723.

KAMRAN, N., LAMB, K. G., and SHADWICK, W. F. 1985. The local equivalence problem for $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painlevé transcendents, *J. Diff. Geom.*, 22: 139-150.

KAMRAN, N., and OLVER, P. J. 1989. Equivalence of diferential operators, *SIAM. J. Math. Anal.*, 20: 1172-1185.

KAMRAN, N., and OLVER, P. J. 1989. Equivalence problems for first order Lagrangians on the line, *J. Differential Equations*, 80: 32-78.

KAMRAN, N., and OLVER, P. J. 1992. Equivalence of higher-order Lagrangians. III. New invariant differential equations, *Nonlinearity*, 5 (2): 601.

KARTAK, V. V. 2012. Solution of the equivalence problem for the Painlevé IV equation, *Teoret. Mat. Fiz.*, 173 (2): 245-267.

KOBAYASHI, K., NOMIZU, S. 1969. Foundations of differential geometry. Vol I,II. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., NewYork-London-Sydney.

KURANISHI, M. 1957. On E. Cartan's Prolongation Theorem of Exterior Differential Systems, *American Journal of Mathematics* 79 (1): 1-47.

LEE, J. 2003. Introduction to Smooth Manifolds, Springer, New York.

MONTGOMERY, R. 2002. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications, volume 91 of *Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society*, Providence, RI.

MORITA, S. 2001. Geometry of differential forms. *Translations of Mathematical Monographs, volume 201, American Mathematical Society*, Providence, RI.

MOROZOV, O. I. 2006. Contact-equivalence problem for linear hyperbolic equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 135 (1): 2680-2694.

MOROZOV, O. I. 2002. Moving coframes and symmetries of differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35 (12): 2965-2977.

NODA, T. 2011. Equivalence problem of second order PDE for scale transformations, *Hokkaido Math. J.*, 40 (3): 313-335.

OLVER, P. J. 1995. Equivalence, invariants, and symmetry, Cambridge University Press, Cambridge.

OLVER, P. J. 1993. Applications of Lie Groups to Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

POINCARÉ, H. 1907. Les functions analytique de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Cire Math. Palermo*, 23: 185-220.

SATO, H., and YOSHIKAWA, A. Y. 1998. Third order ordinary differential equations and Legendre connections, *J. Math. Soc. Japan*, 50 (4): 993-1013.

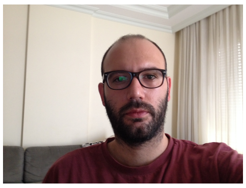
SAUNDERS, D. J. 1979. The geometry of jet bundles, Cambridge University Press, Cambrige.

STEENROD, N. 1999. The topology of fibre bundles, Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ.

WELLS, R. O. 1982. The Cauchy-Riemann equations and differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6 (2): 187-199.

VAISMAN, I. 1994. Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Birkhäuser.

ÖZGEÇMİŞ



Tuna Bayrakdar 1982 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladıktan sonra 2000 yılında girdiği Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2006 yılında mezun oldu ve aynı yıl İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2010 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandıktan sonra yüksek lisans öğrenimini burada tamamlayarak aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Doktora öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.