

ÖZET

CONFLICT KÜMELERİN GEOMETRİSİ

Ali BOLAT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Mayıs 2013, 39 sayfa

Bu tezin amacı, düzlemde conflict kümelerin diferensiyellenebilirliğini ve eğrilikliğini incelemektir. Tezin ilk bölümünde Öklid geometrisi ve topoloji ile ilgili temel kavramlar verildikten sonra ikinci ve üçüncü bölümde düzlemde conflict kümelerin önemli birkaç özelliği gösterilmiştir. Daha sonra conflict kümelerin diferensiyellenebilirliği ve eğrilikliği ile ilgili teoremler kanıtlanmıştır. En son olarak uzaklığın etkisi Johnson-Mehl Modeli gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER : Conflict Kümeler, Öklid Uzayı, Eğrilik

JÜRİ : Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Danışman)

Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Yrd. Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ABSTRACT

THE GEOMETRY OF CONFLICT SETS

Ali BOLAT

M. Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

May 2013, 39 pages

The purpose of this paper is to study the smoothness and curvature of conflict sets of the distance function in the plane. In the first section part of the thesis, the fundamental concepts about Euclidean geometry and topology are given. In the second and the third parts of the thesis several important properties of conflict sets in the plane. Furthermore, some theorems about the smoothness and curvature of conflict sets are proved. Finally, weighted distance function which is called Johnson-Mehl Model is shown.

KEYWORDS : Conflict sets, Euclidean Space, Curvature

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (Supervisor)

Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Asst. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ÖNSÖZ

Conflict kümeler hesaplamalı geometride önemli bir rol oynar. Ayrıca elipslerin, hiperbollerin, parabollerin tarihsel oluşumu bu kümelerin çalışılmasıyla olmuştur. Bu çalışma düzlem geometrisinin önemli bir parçası olan conflict kümelerin eski çalışmaları ve son çalışmaları arasındaki ilişkiyi göstermektedir. A ve B kümelerine eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri her zaman çalışılan ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Conflict kümeler, ilk olarak A ve B kümelerinin ilk karşılaştığı yer olarak düşünülebilir. Ayrıca, hem A kümesine hem de B kümesine teğet olan dairesel disklerin merkezlerinin geometrik yeri bize conflict kümeyi verir. Conflict kümeler konusu eş mesafedeki kümeler, eş mesafe kümeleri, açıortay adı ile de çalışılmıştır. Bu çalışmada ilk olarak conflict kümenin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra, conflict küme örnekleri verilmiş, uçurtma inşaaı gösterilmiştir. Gerekli şartlar verilerek, conflict kümenin düzgünlüğü ve diferensiyellenbilirliği kanıtlanmıştır. Son olarak da uzaklığın etkisi (Johnson-Mehl Modeli) verilmiştir.

Bu tez çalışmamın, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayız.

Bu çalışma kapsamında benden yardımlarını asla esirgemeyen, beni sabırla dinleyen, bilgi ve saatlerini benimle paylaşan ve bana kendisiyle çalışma fırsatı sunan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN'e , yine bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıyan, her fırsatta bana destek olan ve bilgilerini benimle paylaşan hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e , ayrıca sonsuz sevgi ve destekleriyle her zaman yanımda olan ve beni ne pahasına olursa olsun destekleyen aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
1. 1. Afın Uzay	1
1. 2. Metrik Uzay	1
1. 3. Öklid Uzayı	1
1. 4. Uzaklık Kavramı	2
1. 5. Konveks Küme	5
1. 6. Topolojik Kavramlar	6
1. 6. 1. Açık küme	6
1. 6. 2. Kapalı küme	8
2. Düzlemde Conflict Kümenin Tanımı ve Örnekleri	11
2. 1. Düzlemde Conflict Kümenin Tanımı	11
2. 2. Düzlemde Conflict Kümenin Örnekleri	12
3. Düzlemde Conflict Kümenin Özellikleri	19
3. 1. Düzlemde Conflict Kümenin Düzgünlüğü	19
3. 1. 1. Uçurtma inşası	19
3. 2. Düzlemde Conflict Kümenin Eğriliği	24
4. Uzaklığın Etkisi (Johnson-Mehl Modeli)	30
4. 1. JM Uçurtması İle İlgili Geometrik Formüller	32
4. 2. Yapraklanma Mesafesi	37
5. SONUÇ	38
6. KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Bir Noktanın Bir Kümeye Uzaklığı	3
Şekil 1.2. Bir Kümenin Bir Kümeye Uzaklığı	4
Şekil 1.3. Konvekslik	5
Şekil 1.4. Konveks Olmayan Küme Örneği	5
Şekil 1.5. Her Açık Yuvar Açık Kümedir	7
Şekil 1.6. Açık Küme Örneği	8
Şekil 1.7. Açık Küme Örneği	8
Şekil 1.8. Kapalı Küme Örneği	9
Şekil 1.9. Bağlantılı Olmayan Küme Örneği	10
Şekil 1.10. Bağlantılı Olmayan Küme Örneği	10
Şekil 2.1. İki Noktanın Conflict Kümesi	12
Şekil 2.2. Bir Nokta Bir Doğrunun Conflict Kümesi	13
Şekil 2.3. Bir Nokta Bir Doğrunun Conflict Kümesi	14
Şekil 2.4. Yarıçapları Aynı İki Çemberin Conflict Kümesi	14
Şekil 2.5. Yarıçapları Farklı İki Çemberin Conflict Kümesi	15
Şekil 2.6. Çember İle Dışındaki Bir Noktanın Conflict Kümesi	16
Şekil 2.7. Çember İle İçindeki Bir Noktanın Conflict Kümesi	17
Şekil 2.8. Teğet Disklerin Merkezlerinin Oluşturduğu Conflict Küme	18
Şekil 3.1. Uçurtma İnşaasının İlk Aşaması	19
Şekil 3.2. Uçurtma İnşaasının İkinci Aşaması	20
Şekil 3.3. Uçurtma İnşaasının Üçüncü Aşaması	20
Şekil 3.4. İki Parabole Teğet Doğrunun Tekliği	21
Şekil 3.5. Conflict Kümeye Göre Bölgeler	22
Şekil 3.6. Conflict Kümenin Bölgelere Göre Çizdiği Paraboller	22
Şekil 3.7. Conflict Kümenin Parabolü Sınırladığı Bölgeler	23
Şekil 3.8. Evolüt Eğrisi	24
Şekil 3.9. Eş Mesafedeki Ayak	26
Şekil 3.10. Conflict Kümenin Eğriliği	27
Şekil 3.11. Lineer Bağımlı Vektörler	27
Şekil 3.12. Lineer Bağımlı Vektörler	28
Şekil 4.1. Uzaklığın Etkisi	30
Şekil 4.2. Nokta-Nokta JM-Bisector	31

Şekil 4.3. Doğru-Doğru JM-Bisector	31
Şekil 4.4. Doğru-Nokta JM-Bisector	31
Şekil 4.5. Doğru-Nokta JM-Bisector	32
Şekil 4.6. JM-Uçurtma Örneği.....	33
Şekil 4.7. JM-Uçurtma Örneği.....	33
Şekil 4.8. JM-Uçurtmasında Sıkıştırıcının Şekli	34
Şekil 4.9. Kümeler Noktalar Alınınca JM-nin Geometrik Şekli	34
Şekil 4.10. Yapraklanma Mesafesi	37

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Öklid Uzayı ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

1.1. Afın Uzay

A boş olmayan bir küme ve bir \mathcal{F} cisimi üzerindeki vektör uzayı V olsun.

Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A kümesine V ile birleştirilmiş **afın uzay** denir.

$$i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$ii) \forall P \in A \text{ ve } \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoglu 2000).

1.2. Metrik Uzay

A boş olmayan bir küme ve $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$i) \forall x, y \in A \text{ için } d(x, y) = 0 \text{ dir ancak ve ancak } x = y$$

$$ii) \forall x, y \in A \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$iii) \forall x, y, z \in A \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

önermeleri doğru ise d fonksiyonuna A üstünde bir **metrik** denir.

(A, d) ikilisine de bir **metrik uzay** denir (Hacısalihoglu 2000).

1.3. Öklid Uzayı

\mathbb{R} reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ eşitliğiyle belirli \mathbb{R}^n kümesinde toplama işlemi,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre \mathbb{R}^n kümesi \mathbb{R} cisimi üstünde bir vektör uzayı olur.

\mathbb{R}^n vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$$

fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

diyelim.

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir normdur. Buna göre, \mathbb{R}^n vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan,

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, \mathbb{R}^n uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, \mathbb{R}^n bir metrik uzayıdır.

Her metrik uzay bir topolojik uzay olduğundan, \mathbb{R}^n uzayı bir topolojik uzayıdır. Belirtilen topolojisiyle birlikte \mathbb{R}^n uzayına **Öklid Uzayı** denir (Hacısalihoglu 2000).

1.4. Uzaklık Kavramı

\mathbb{E}^n n -boyutlu Öklid uzayı ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ olsun. $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$ kümesinden \mathbb{R} kümesine bir d fonksiyonu tanımlansın. Buradan

$$d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** denir. $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 1.1 (Hacısalihoglu 2000) \mathbb{E}^n üzerinde uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat. $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^n$ için

i) Her $x, y \in A$ için $d(x, y) = 0$ dır ancak ve ancak $x = y$

ii) Her $x, y \in A$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii) Her $x, y, z \in A$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ olduğunu gösterelim.

i) \mathbb{E}^n ile birleşen \mathbb{R}^n iç çarpım uzayında, iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha\| \geq 0$ dır. Buradan

$$\vec{xy} = \alpha \text{ ve } d(x, y) = \|\vec{xy}\| \geq 0 \text{ ve } \|\alpha\| = 0$$

ise

$$d(x, y) = \|\vec{xy}\| = 0 \text{ veya } \vec{xy} = \vec{0} \text{ veya } x = y$$

elde edilir. Tersine,

$$x=y \rightarrow \vec{xy} = \vec{0} \rightarrow \|\vec{xy}\| = 0 \rightarrow d(x,y) = 0$$

olur.

ii) $d(x,y) = \|\vec{xy}\| = \|\vec{yx}\| = d(y,x)$ elde edilir.

iii) İç çarpım uzayında normun özelliklerinden

$$\|\vec{xz}\| = \|\vec{xy} + \vec{yz}\| \leq \|\vec{xy}\| + \|\vec{yz}\| \text{ veya } d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

elde edilir. ■

Tanım 1.2 (Mucuk 2009) \mathbb{E}^n bir metrik uzay ve $A \subset \mathbb{E}^n$ olsun. Bir $x \in \mathbb{E}^n$ noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x,A) = \inf \{d(x,y) : y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Yani; $d(x,A)$, x noktasının A kümesindeki noktalara olan uzaklıklarının en büyük alt sınırıdır.

Tanım 1.3 (Hacısalihoglu 2000)

$$S^n = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{E}^{n+1}$$

kümesine **n -boyutlu küre** (n -küre) adı verilir.

Özel olarak $n = 1$ için

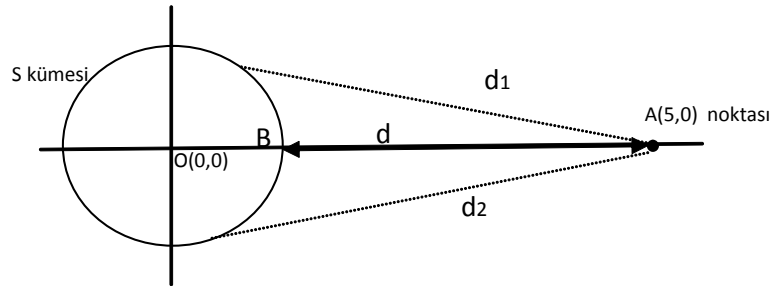
$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\} \subset \mathbb{E}^2$$

kümesine **1-boyutlu küre** denir. S^1 küresine **çember** adı verilir.

Örnek 1.4 \mathbb{E}^2 üzerinde bir nokta $A = (5,0)$ ve bir küme

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

olsun. A noktasının S kümesine uzaklığı aşağıdaki gibi bulunabilir.



Şekil 1.1 (A noktasının S kümesine uzaklığı)

A noktasının, S kümesine en yakın noktasını bulmak için merkez ile A noktası birleştirilerek bir doğru oluşturulur. Bu doğrunun çemberi kestiği 2 nokta vardır. A noktasına yakın olan nokta, bize çembere en yakın noktayı verir. Burada merkezi $(0,0)$ ve yarıçapı 1 olan S küresinin $A(5,0)$ noktasına uzaklığının 4 birim olduğu görülür.

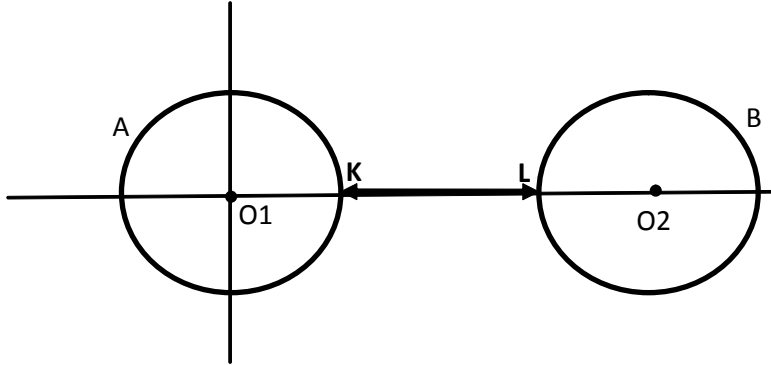
Tanım 1.5 (Mucuk 2009) \mathbb{E}^n bir metrik uzay ve $A, B \subset \mathbb{E}^n$ olsun. A ve B kümelerinin birbirlerine göre uzaklığı,

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.6 \mathbb{E}^2 üzerinde $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ve $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : (x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 1\}$ kümelerinin birbirlerine göre uzaklıkları aşağıdaki gibi bulunabilir. A kümesi, merkezi $O_1(0,0)$ ve yarıçapı 1 ile B kümesi merkezi $O_2(5,0)$ ve yarıçapı 1 olan çemberlerdir.

Merkezler arası uzaklık



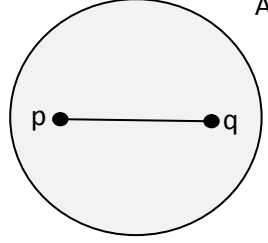
Şekil 1.2 (A kümesinin B kümesine uzaklığı)

$$\begin{aligned} d(O_1, O_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{25 + 0} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da çemberlerin birbirine en yakın noktalarını bulmak için yarıçaplar çıkarılır. Böylece $d(A, B) = 3$ ifadesi elde edilir.

1.5. Konveks Küme

Tanım 1.7 Bir A kümesinde herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar aynı kümede kalıyorsa A kümesine **konveks küme** denir.



Şekil 1.3 (Konvekslik)

Yani, A boştan farklı bir küme ve A kümesinin herhangi iki elemanı p, q olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(\lambda)p + (1 - \lambda)q \in A$$

ise A konvektir. Buradan

$$\lambda = 0 \text{ için } (0)p + (1 - 0)q = q ,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ için } \left(\frac{1}{2}\right)p + \left(1 - \frac{1}{2}\right)q = \frac{1}{2}(p + q)$$

ve

$$\lambda = 1 \text{ için } (1)p + (1 - 1)q = p$$

olduğu görülür. Burada λ sayısı 0 ile 1 arasında dolaşırken

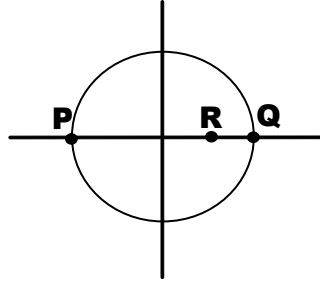
$$(\lambda)p + (1 - \lambda)q$$

ifadesi p ile q noktaları arasındaki doğru parçasını tarar.

Örnek 1.8 $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 3^2\}$ kümesinin konveksliği aşağıdaki gibi incelenebilir.

$$P = (-3, 0) \text{ ve } Q = (3, 0) \in A$$

dır. PQ doğru parçasının üzerinde bir nokta $R = (2, 0)$ alınabilir.



Şekil 1.4 (Konveks olmayan küme örneği)

(2, 0) noktası denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 3^2 \\2^2 + 0^2 &= 3^2 \\4 &\neq 9\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki R noktası PQ doğru parçasının elemanıdır ancak A kümesinin elemanı değildir. Bu da A kümesinin konveks olmadığını gösterir.

Örnek 1.9 \mathbb{R}^3 üzerinde $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ kümesinin konveksliği aşağıdaki gibi incelenebilir.

$$P = (0, 0, 1) \text{ ve } Q = (0, 0, -1) \in A$$

olur. PQ doğru parçasından geçen bir $R = (0, 0, 0)$ noktası alınabilir.

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) \text{ noktası } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \text{ denklemine yerine yazılırsa} \\0^2 + 0^2 + 0^2 &= 1^2 \\0 &\neq 1\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki R noktası PQ doğru parçasının elemanıdır ancak A kümesinin elemanı değildir. Bu da A kümesinin konveks olmadığını gösterir.

Örnek 1.10 $S^n = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{x}_i^2 = r^2 \right\}$ küresi konveks değildir.

$S^n = \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{x}_i^2 < r^2 \right\}$ alırsak içi dolu küre olur.

Bu küme konveks olur.

1.6. Topolojik Kavramlar

1.6.1. Açık küme

Tanım 1.11 (Mucuk 2009) (X, d) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ ve $r > 0$ verilsin.

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

ifadesine x_0 merkezli, r yarıçaplı **açık yuvar** denir.

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

ifadesine x_0 merkezli, r yarıçaplı **kapalı yuvar** denir.

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

ifadesine x_0 merkezli, r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

Tanım 1.12 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer $B(x_0, \epsilon) \subseteq A$ olacak biçimde en az bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa x_0 noktasına A kümesinin **iç noktası** denir.

Tanım 1.13 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ için A kümesinin tüm iç noktaları kümesine A kümesinin **içi** denir ve A° ile gösterilir. Yani;

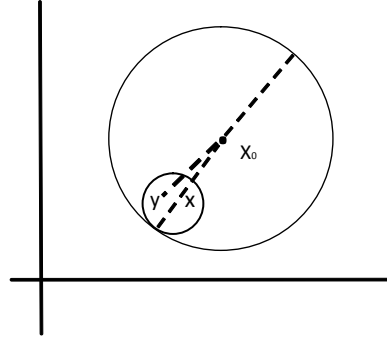
$$A^\circ = \{x : x \text{ noktası } A \text{ kümesinin iç noktası}\}$$

olarak tanımlanır ve $A^\circ \subseteq A$ olur.

Tanım 1.14 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin her elemanı A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine **açık küme** denir.

Teorem 1.15 (Mucuk 2009) \mathbb{R}^n üzerinde her açık yuvar açık kümedir.

İspat. $n = 2$ için gösterilsin.



Şekil 1.5 (Her açık yuvar açık kümedir)

$B(x_0, \epsilon)$ açık yuvarının her noktasının bir iç nokta olduğu gösterilsin. Yani;

$$\forall x \in B(x_0, \epsilon) \text{ için } \exists \delta > 0$$

öyle ki

$$B(x, \delta) \subseteq B(x_0, \epsilon)$$

elde edilir. Buradan $x \in B(x_0, \epsilon)$ alınırsa $d(x, x_0) < \epsilon$ olur.

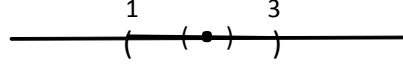
$$\delta = \epsilon - d(x, x_0)$$

seçelim. İddia ediliyor ki $B(x, \delta) \subseteq B(x_0, \epsilon)$ olsun. Burada $\forall y \in B(x, \delta)$ için

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \delta = \epsilon$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

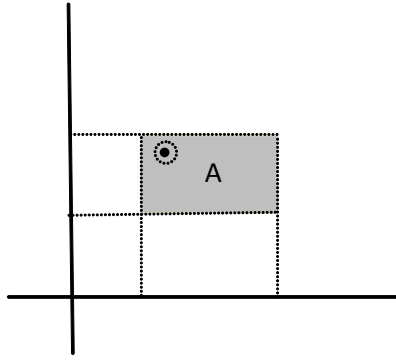
Örnek 1.16 $A = (1, 3) \subseteq \mathbb{R}$ kümesi açık küme midir?



Şekil 1.6 (Açık küme örneği)

\mathbb{R} üzerinde bulunan tüm açık aralıklar açık kümedir.

Örnek 1.17 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3 \text{ ve } 1 < y < 2\} \subset \mathbb{R}^2$ kümesi açık küme midir ?



Şekil 1.7 (Açık küme örneği)

$\forall (x, y) \in A$ için $(x, y) \subset B \subset A$ olacak şekilde bir B yuvarı olduğu için her nokta iç noktadır. Bu nedenle A açık kümedir.

1.6.2. Kapalı Küme

Tanım 1.18 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ için $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesinin bir iç noktasına, A kümesinin **dış noktası** denir.

Tanım 1.19 (Mucuk 2009) $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesinin içine, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ifadesinin **dışı** denir ve $dış(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.20 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin tümleyeni $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesi bir açık küme ise A kümesine **kapalı küme** denir.

$$A \text{ kapalı} \iff dış(A) = \mathbb{R}^n \setminus A$$

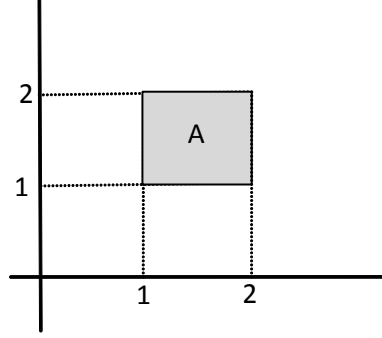
olarak ifade edilir.

Örnek 1.21 \mathbb{R} üzerinde herbir $[a, b]$ kapalı aralığı, kapalı kümedir.

$$A = [a, b], \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, a) \cup (b, \infty) = (\mathbb{R} \setminus A)^\circ$$

olduğu için A kapalı kümedir.

Örnek 1.22 $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2 \text{ ve } x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesi kapalı mıdır?



Şekil 1.8 (Kapalı küme örneği)

A kümesinin tümleyeni açık olduğu için A kapalı kümedir.

Tanım 1.23 (Mucuk 2009) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin.

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A^\circ \text{ ve } x \notin \text{dış}(A)\}$$

ifadesine, A kümesinin sınırı denir. Buradan $\partial A = (A^\circ \cup \text{dış}(A))^t$ biçiminde de ifade edilebilir. Ayrıca $\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \text{dış}(A)$ eşitliği vardır.

Önerme 1.24 (Mucuk 2009) A kapalıdır $\iff \partial A \subset A$ olur.

İspat. A kapalı ve $x \in \partial A$ olsun. Buradan

$$x \notin A^\circ \text{ ve } x \notin \text{dış}(A)$$

olur. Fakat A kümesinin kapalı olduğundan dolayı

$$A^t = \text{dış}(A)$$

olur. O halde $x \notin A^t$ olduğu için $x \in A$ olduğu görülür.

Tersine; $\partial A \subset A$ olsun. A kümesinin kapalı olduğunu göstermek için A^t kümesinin açık olduğu gösterilebilir. $x \in A^t$ olsun. Varsayımdan $\partial A \subset A$ olduğundan $x \notin \partial A$ olur. O halde $x \in A^\circ$ olamaz. Buradan

$$x \in \text{dış}(A)$$

olup

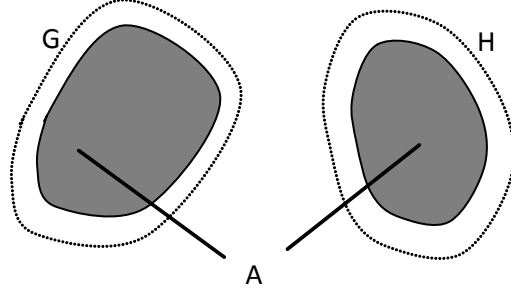
$$x \in B \subseteq A^t$$

olacak şekilde x noktasının bir B açık komşuluğu vardır. Buradan da A^t kümesinin açık olduğu görülür. ■

Tanım 1.25 (Mucuk 2009) (X, d) bir metrik uzay ve A bu uzayda bir alt küme olsun. Eğer A kümesi için

$$A \subset G \cup H, A \cap G \neq \emptyset, A \cap H \neq \emptyset \text{ ve } A \cap G \cap H = \emptyset$$

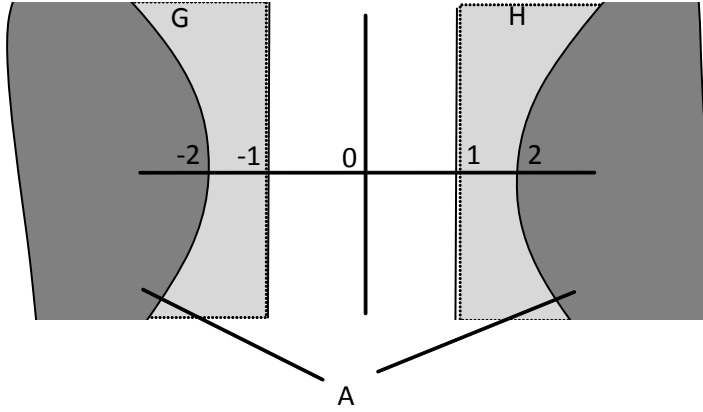
olacak şekilde G ve H gibi boş olmayan iki açık küme yoksa, A kümesine **bağlantılıdır** denir. Yani, A kümesi bu tanımdan hareketle bir tek parçadan meydana geliyor denilebilir.



Şekil 1.9 (Bağlantılı olmayan küme)

Örneğin $(0, 1)$ açık aralığı ve $(0, 1]$ soldan açık, sağdan kapalı aralığı bağlantılıdır. Karmaşık düzlemde $|z| \leq 1$ daresi bağlantılıdır.

Örnek 1.26 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 4\}$ şeklinde olan küme bağlantılı değildir. Boştan farklı $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$ ve $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ olan yarı düzlemleri göz önüne alınsın.



Şekil 1.10 Bağlantılı olmayan küme örneği

Buradan, A kümesinin bağlantılı olmadığı ortaya çıkar. Ayrıca, bu A kümesinin geometrik olarak da ayrık olduğu söylenebilir.

Tanım 1.27 (Mucuk 2009) Bağlantılı ve açık kümeye **bölge** denir.

2. Düzlemde Conflict Kümenin Tanımı ve Örnekleri

2.1. Düzlemde Conflict Kümenin Tanımı

Conflict kümenin kaynaklarda yer alan birçok tanımı vardır. Bunlardan birkaçı iki kümeyle eşit uzaklıktaki noktaların oluşturduğu küme, iki kümeyle teğet olan dairesel disklerin merkezlerinin oluşturduğu küme olarak tanımlanır. Conflict kümenin tanımı dalgalanmaya dayanmaktadır. Örneğin durgun bir suya aynı anda iki taş atılsın ve dalgaların oluşturduğu halkalar düşünülsün. Bu halkaların birbirlerine ilk temas ettiği noktalara, **Conflict kümenin noktaları** denir. (Manen and Siersma 2003)

Tanım 2.1 (Siersma 1999) *d* Öklidyen uzaklık fonksiyonunu gösterebilir. Öklid düzleminde *A* ve *B* iki kapalı küme olsun. $d(x, A)$ bir *x* noktasının *A* kümesine uzaklığını gösterebilir. **Conflict küme**

$$Conf(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, A) = d(x, B)\}$$

şeklinde tanımlanır. Conflict küme *A* ve *B* kümelerine eşit uzaklıktaki noktaların kümesi olarak da tanımlanır.

Tanım 2.2 (Siersma 1999) *d* Öklidyen uzaklık fonksiyonunu gösterebilir. Öklid düzleminde, *A* ve *B* iki kapalı küme olsun. $d(x, A)$ bir *x* noktasının *A* kümesine uzaklığını gösterebilir. *A* kümesinin *B* kümesine göre bölgesi

$$Terr(A, B) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

şeklinde tanımlanır.

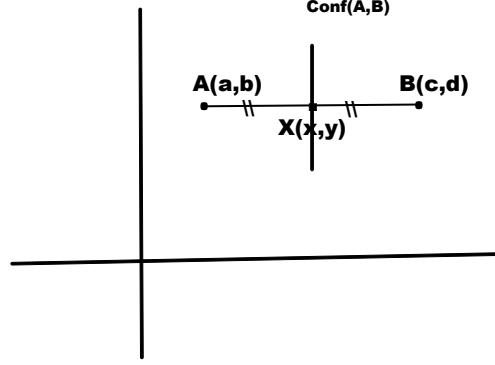
Tanım 2.3 (Siersma 1999) *d* öklidyen uzaklık fonksiyonunu gösterebilir. Öklid düzleminde, *A* ve *B* iki kapalı küme olsun. $d(x, A)$ bir *x* noktasının *A* kümesine uzaklığını gösterebilir. *B* kümesinin *A* kümesine göre bölgesi

$$Terr(B, A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, A) > d(x, B)\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Düzlemde Conflict Küme Örnekleri

Örnek 2.4 Öklid düzleminde $A = (a, b)$ ve $B = (c, d)$ kümelerinin conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.1 (İki noktanın conflict kümesi)

A ve B noktalarının X noktasına uzaklığı

$$d(X, A) = d(X, B)$$

ile gösterilsin. Buradan

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

ifadesi elde edilir. Eşitliğin iki yanındaki ifadeler açılırsa

$$\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2dy + d^2}$$

olur. İki taraftan kare aldığımızda

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2dy + d^2$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$-2ax + a^2 - 2by + b^2 = -2cx + c^2 - 2dy + d^2$$

ifadesi elde edilir. Buradan y ' li ifadeler sol tarafa alınırsa,

$$2dy - 2by = 2ax - 2cx + c^2 + d^2 - a^2 - b^2$$

elde edilir. Bu ifade y parantezine alınırsa

$$y(2d - 2b) = (2a - 2c)x + (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)$$

olduğu görülür. Buradan

$$y = \left[\frac{(2a - 2c)}{(2d - 2b)} \right] x + \left[\frac{(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)}{(2d - 2b)} \right]$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca

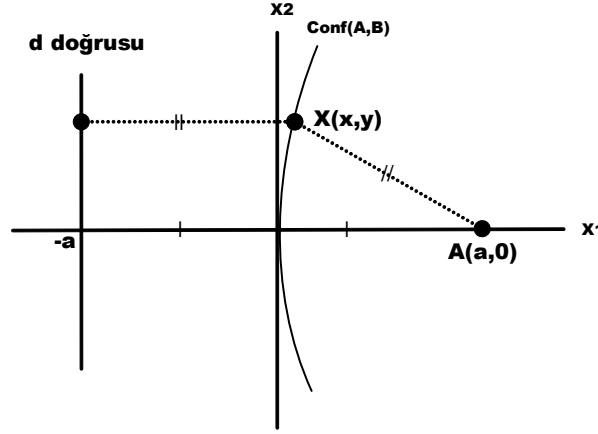
$$M = \left[\frac{(2a - 2c)}{(2d - 2b)} \right] \text{ ve } N = \left[\frac{(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)}{(2d - 2b)} \right]$$

alnırsa

$$y = Mx + N$$

doğrusu elde edilir. Buradan iki noktanın conflict kümesinin bir doğru olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 2.5 Öklid düzleminde $A = (a, 0)$ noktasının ve $B = d$ doğrusunun conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.2 (Bir nokta ve bir doğrunun conflict kümesi)

Conflict kümenin tanımından $d(X, A) = d(X, d)$ elde edilir. Buradan

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = |a + x|$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

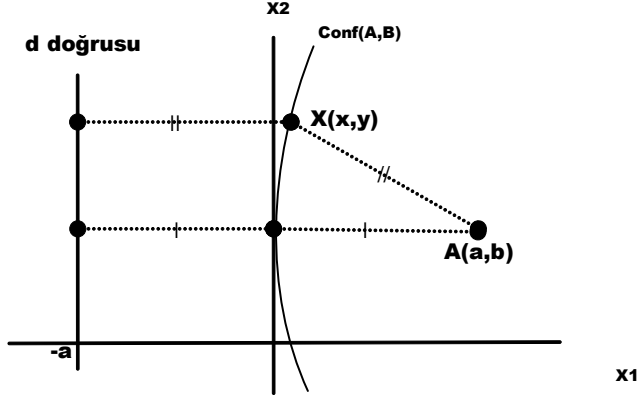
elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$y^2 = (4a)x$$

parabolü elde edilir. Yani bir noktanın ve bir doğrunun conflict kümesinin bir parabol olduğu görülür.

Örnek 2.6 Öklid düzleminde $A = (a, b)$ noktasının ve $B = d$ doğrusunun conflict

kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.3 (Bir nokta ve bir doğrunun conflict kümesi)

$X \in Conf(A, B)$ olsun. Conflict kümenin tanımından $d(X, A) = d(X, d)$ elde edilir. Bu eşitlikten

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |a+x|$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeden

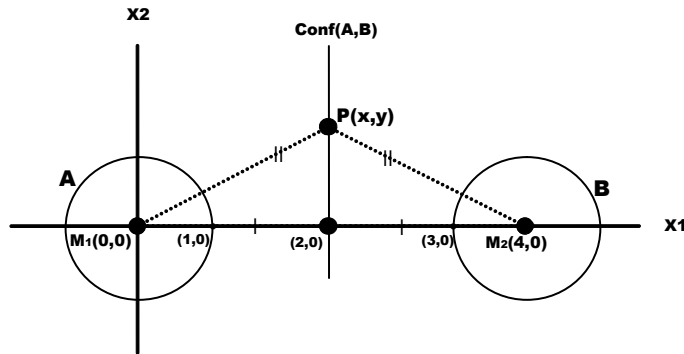
$$4ax = y^2 - 2by + b^2$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x = \left(\frac{1}{4a}\right)(y-b)^2$$

parabolü elde edilir.

Örnek 2.7 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ve $B = \{(x, y) : (x-4)^2 + y^2 = 1\}$ kümelerinin conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.4 (Yarıçapları aynı iki çemberin conflict kümesi)

$P \in \text{Conf}(A, B)$ olsun. Conflict kümesinin tanımından $d(P, M_1) = d(P, M_2)$ elde edilmiş olur. Bu ifadeden

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

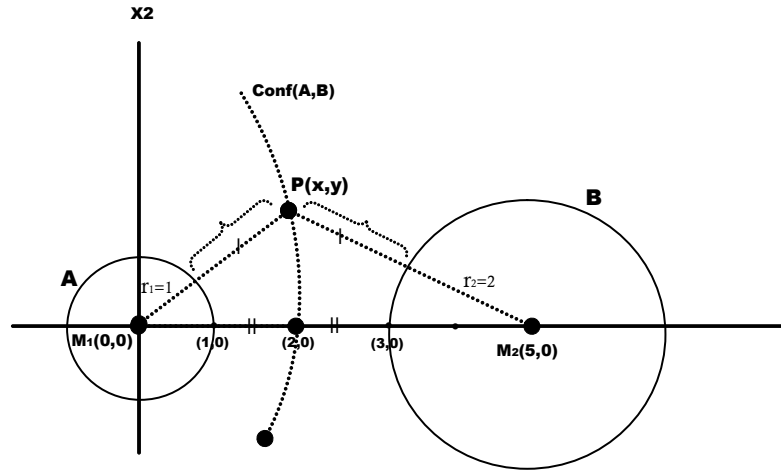
$$x^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$x = 2$$

elde edilir. Yarıçapları aynı olan A ve B gibi iki çemberin conflict kümesinin bir doğru olduğu elde edilmiş olur.

Örnek 2.8 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ve $B = \{(x, y) : (x-5)^2 + y^2 = 4\}$ kümelerinin conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir (Şekil 2.5 hiperbolün sol kolu için gösterilmiştir).



Şekil 2.5 (Yarıçapları farklı iki çemberin conflict kümesi)

$P \in \text{conf}(A, B)$ olsun. Conflict kümesinin tanımından $d(P, M_1) - 1 = d(P, M_2) - 2$ elde edilir. Buradan

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - 1 = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - 2$$

olur. Yukarıdaki ifadeden

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

elde edilir. Buradan

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -5x + 12$$

olur. Bu eşitliğin iki tarafından tekrar kare alınırsa

$$x^2 + y^2 = 25x^2 - 120x + 144$$

elde edilir. Burada aynı bilinmeyenler paranteze alınıp

$$(24x^2 - 120x + 150) - y^2 = 6$$

olduğu görülür. Buradan

$$24\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - y^2 = 6$$

bulunur. Eşitlikte sağ taraf bir olacak şekilde düzenlenirse

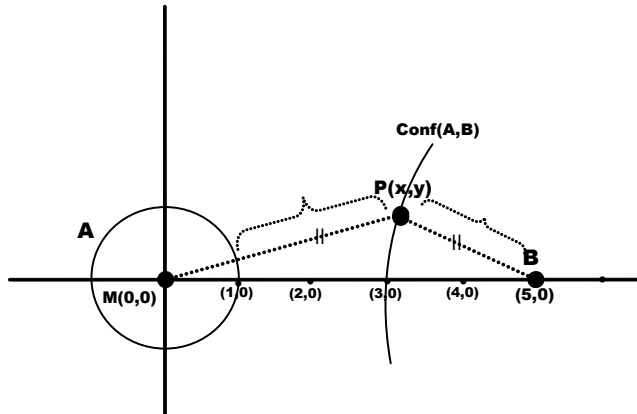
$$4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{6} = 1$$

ifadesi elde edilir. En sonunda

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{6} = 1$$

hiperbolü bulunur.

Örnek 2.9 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ merkezli çemberinin ve bu çemberin dışında bir $B = \{(5, 0)\}$ noktasının conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.6 (Çember ve çemberin dışında bir noktanın conflict kümesi)

$P \in Conf(A, B)$ olsun. Conflict kümesinin tanımından $d(P, M) - 1 = d(P, B)$ elde edilir. Yukarıdaki şekil hiperbolün sağ kolu için kullanılır. Buradan

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} - 1 = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 0)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5x - 12$$

elde edilir. Tekrar iki taraftan kare alınırsa

$$x^2 + y^2 = 25x^2 - 120x + 144$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y^2 - 24\left(x^2 - 2\frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) = -6$$

ifadesi bulunur. Sağ taraf bir olacak şekilde düzenlenirse

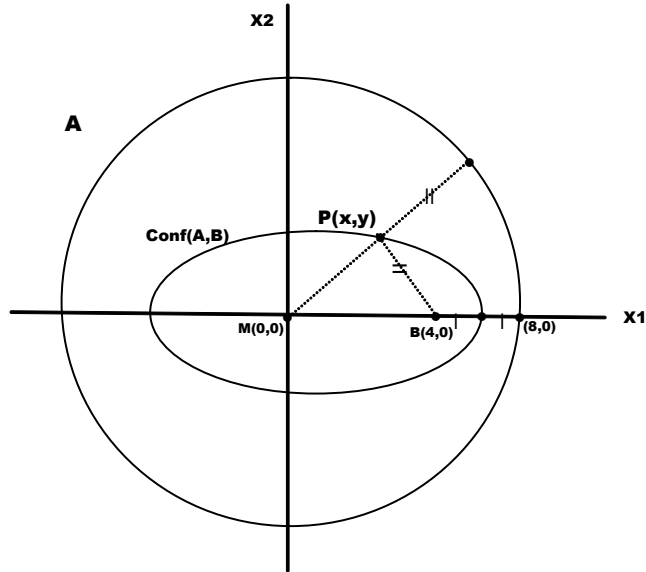
$$\frac{y^2}{-6} + 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{6} = 1$$

hiperbolü elde edilir.

Örnek 2.10 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 64\}$ merkezli çemberinin ve bu çemberin içinde bir $B = \{(4, 0)\}$ noktasının conflict kümesi aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.7 (Çember ile çemberin içinde bir noktanın Conflict kümesi)

$P \in \text{Conf}(A, B)$ ve M noktası A kümesinin merkezi olsun. Conflict kümesinin tanımından $8 - d(P, M) = d(P, B)$ olur. Buradan

$$8 - \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten kare alınırsa

$$64 - 16\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 6$$

ifadesi bulunur. Yukarıdaki eşitlikten tekrar kare alınırsa

$$4(x^2 + y^2) = x^2 + 12x + 36$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$3x^2 - 12x + 12 + 4y^2 = 48$$

ifadesi elde edilir. Tekrar ifade düzenlenirse

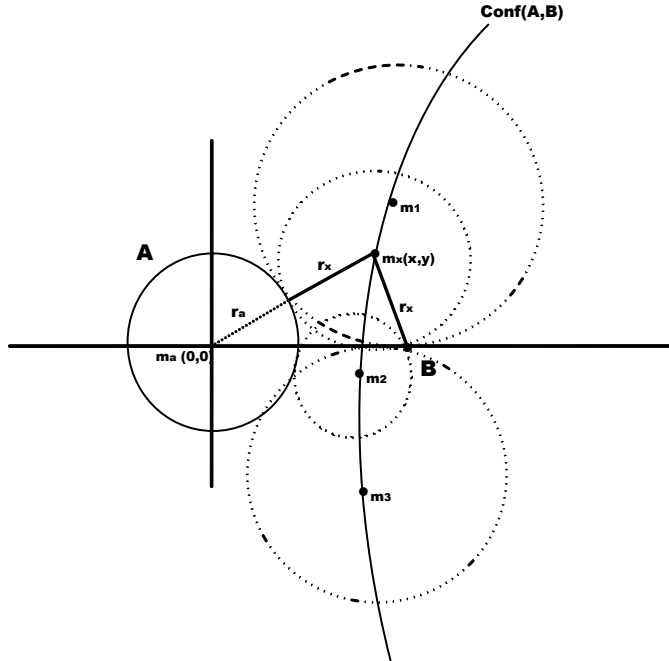
$$3(x-2)^2 + 4y^2 = 48$$

bulunur. Sağ taraf bir yapacak şekilde düzenlenirse

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

ifadesinin bir elips olduğu görülür.

Örnek 2.11 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ çemberi ve bu çemberin dışında bir $B = \{(5, 0)\}$ noktasının conflict kümesinin iki kümeye teğet disklerin merkezi olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.8 (Teğet disklerin merkezlerinin oluşturduğu Conflict Küme)

$|m_a m_x| - r_a = |B m_x|$ ifadesinden hiperbol denklemi elde edilir.

3. Düzlemde Conflict Kümenin Özellikleri

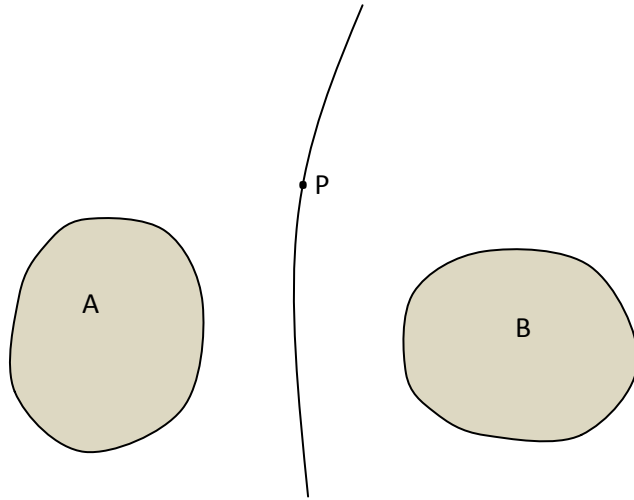
Bu bölümde uçurtma(kite) inşası ile conflict kümenin eğriliği ve düzgünlüğü gösterilecektir.

3.1. Düzgünlük

Conflict kümelerin düzgün olduğu veya A ve B kümelerinin konveks oldukları varsayılmıştır. Konveks olmama durumunda conflict küme her zaman düzgün olmaz. Düzgünlüğün kesin alışılmış diferensiyel topolojide bir C^{k-1} sınıftan conflict küme C^k sınıftan sınırları için verilir. Burada konveks kümelerin sınırları düzgün alınacaktır.

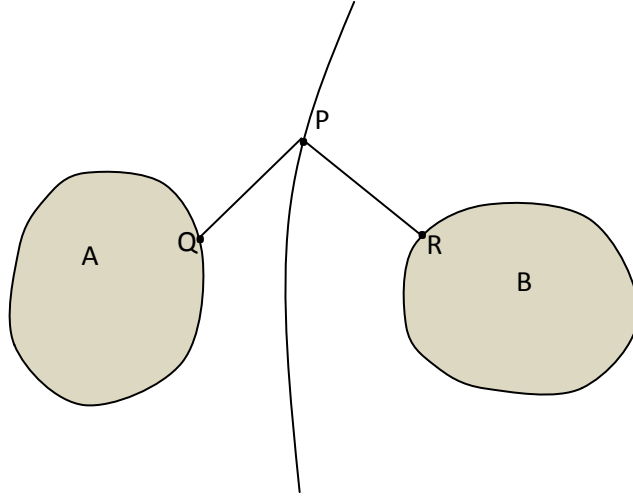
3.1.1. Uçurtma İnşası

Tanım 3.1 (Siersma 1999) P noktası $Conf(A, B)$ nin bir noktası olsun.



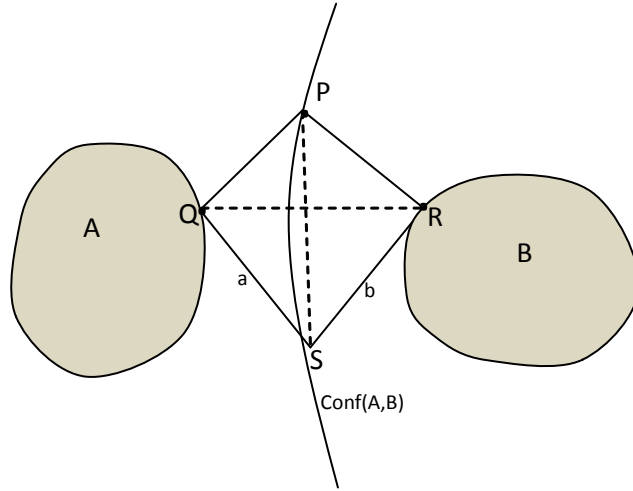
Şekil 3.1 (Uçurtma inşası ilk aşaması)

P noktasının A ve B üzerine izdüşümleri Q ve R olsun.



Şekil 3.2 (Uçurtma inşasının ikinci aşaması)

PQ doğrusuna dik olacak şekilde Q noktasından geçen doğru a olsun ve PR doğrusuna dik olacak şekilde R noktasından geçen doğru b olsun. $PQSR$ dörtgeni bir uçurtmadır. A ve B kümelerinin sınırları diferensiyellenebilir ise bu dikler A ve B kümelerinin sınır eğrilerinin teğetleri olacaktır.



Şekil 3.3 (uçurtma inşasının üçüncü aşaması)

Bu uçurtma, conflict kümenin P noktasıyla ilişkilidir. PS doğru parçasına uçurtma eksenini (kite-axis) denilir. Bu eksen, PR ve PQ izdüşüm doğruları arasında bir açıortaydır. Eğer a ve b paralel oldukları durumda, sınırsız noktada kesişime sahip olurlar, fakat bu durumda sonsuzda bu noktanın kesiştiğini varsayacağız. Bu benzerlikte, kite eksenini hem a hem de b ye paralel olduğunda, P üzerindeki doğru denir. Buradan uçurtmanın tüm P noktalarının yeri conflict küme tanımıdır. Burada P ile S arasında bir dualite görülür. Buradaki S noktalarına kitenin baz noktaları denir. Bu küme aynı uzaklıktaki A ve B kümelerine teğet doğruların kesişim noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanır. Uçurtma özelliğine tanjant özellik de denir. Tanjant özellik konikte bir noktada teğet doğru oluşturulmasında kullanılır.

Uçurtma özelliğın yardımıyla ortaya çıkan en çok bilinen kavramlar parabol(nokta-doğru), elips(çember-iç nokta), hiperbol(çember-dış nokta) dır.

Lemma 3.2 İki parabolün yalnız bir ortak noktası varsa, bu noktada paraboller ortak teğet doğrusuna sahiptirler.

İspat. İki parabolü

$$y = P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{ve} \quad y = P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

şeklinde alınsın. Bu parabollerin ortak çözümleri yapılsa

$$P_1(x) = P_2(x) \iff (a_1 - a_2) \cdot x^2 + (b_1 - b_2) \cdot x + (c_1 - c_2) = 0$$

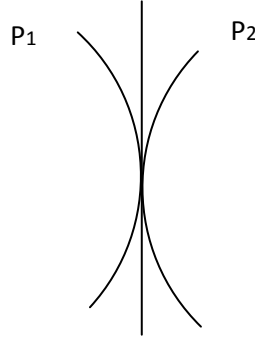
olur. Bu denklemin tek çözümleri olması için $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan

$$(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2) \cdot (c_1 - c_2) = 0$$

olur. O halde tek çözümleri olduğu

$$x_0 = \frac{-(b_1 - b_2)}{2 \cdot (a_1 - a_2)}$$

bu noktada eğimler eşit olur.



Şekil 3.4 (İki parabolün teğet doğrusunun tekliği)

Buradan

$$P_1^{(1)}(x) = 2a_1x + b_1 = 2 \cdot a_1 \cdot \frac{-(b_1 - b_2)}{2(a_1 - a_2)} + b_1 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2};$$

$$P_2^{(1)}(x) = 2 \cdot a_2 \cdot x_0 + b_2 = 2 \cdot a_2 \cdot \frac{-(b_1 - b_2)}{2 \cdot (a_1 - a_2)} + b_2 = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 - a_2}$$

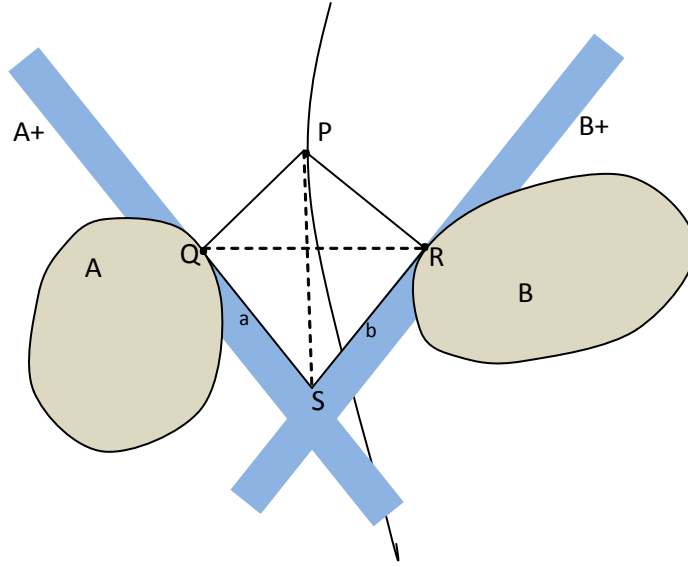
eşitlik sisteminden o noktadaki türevlerin eşit olduğu görülür (Şekil 3. 4). Buradan ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.3 (Siersma 1999) Eğer A ve B Öklid uzayında konveks kümeler ise onların conflict kümeleri diferensiyellenebilirlerdir.

Buradaki teğet doğru, ortak uçurtma eksenidir. Ayrıca bu uçurtma, tekamül eden noktadan izdüşüm doğruları arasında açıortaydır.

İspat. P , $Conf(A, B)$ kümesinin bir noktası olsun. $PQSR$, P noktasındaki uçurtma olsun. A^+ , A bölgesini içeren yarı kapalı düzlemdir ve a doğrusu tarafından sınırlandırılır.

A kümesi A^+ ya genişletilsin ve B kümesinden de R noktası çıkartılsın. B^+ , B bölgesini içeren yarı kapalı düzlemdir ve b doğrusu tarafından sınırlandırılır. B kümesi B^+ ya genişletilsin ve A kümesinden de Q noktası çıkartılsın. Şimdi bu bölgeler kıyaslınsın (Şekil 3. 5).

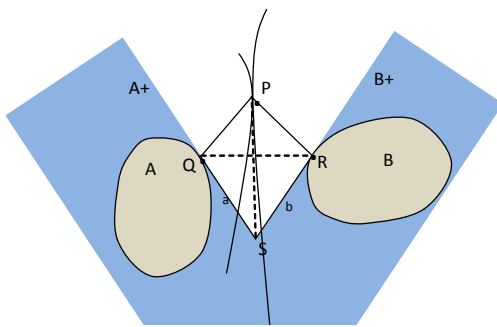


Şekil 3.5 (Conflict kümeye göre bölgeler)

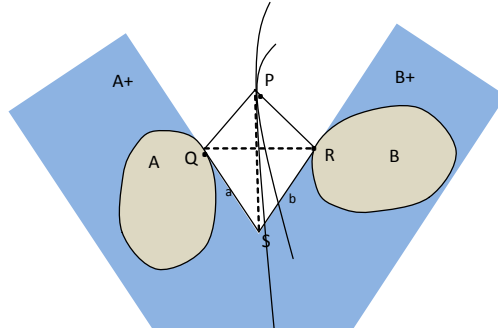
x , $Conf(A, B)$ kümesinin rastgele bir noktası olsun.

$$\begin{aligned} d(x, A^+) &\leq d(x, A) = d(x, B) \leq d(x, R) \\ d(x, Q) &\geq d(x, A) = d(x, B) \geq d(x, B^+) \end{aligned}$$

$x \in Terr(A^+, R)$ ve $x \in Terr(B^+, Q)$ elde edilir.

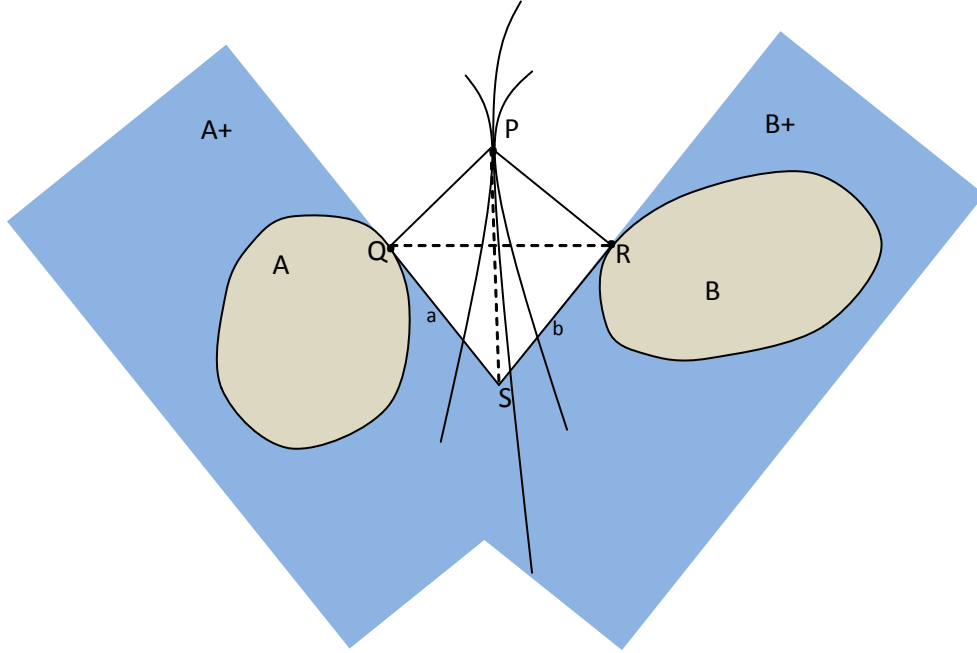


Şekil 3.6a ($conf(Q, B^+)$ kümesi bir parabol çizer)



Şekil 3.6b ($conf(R, A^+)$ kümesi bir parabol çizer)

Her iki bölge paraboller tarafından sınırlandırılır.



Şekil 3.7 (Conflict kümenin parabolü sınırladığı bölgeler)

Bu paraboller sadece bir ortak noktaya sahiptir (Şekil 3. 7).

$Conf(A, B)$ kümesi bu bölgelerin tümleyenleri tarafından tanımlanan kısımların kapanışını içerir. Bu iki parabol P noktasında aynı teğete sahiptir. Aynı zamanda bu teğet conflict kümenin de teğetidir. Uçurtma eksenini olan $Conf(A^+, B^+)$ 'nin parçası olarak a ve b arasındaki açıortayı düşünebiliriz. Ayrıca bu conflict küme A^+ ve B^+ arasında sıkıştırılmıştır ve bu nedenle her iki parabole, P noktasında teğet doğrudur. ■

Yukarıda bahsedilen uçurtma özellikleri, parabol(nokta-doğru), elips(çember, iç nokta), hiperbol(çember, dış nokta) klasik durumları iyi bilinir. Uçurtma özelliğe tanjant özellik adı verilir. Tanjant özellik, konikte bir noktada teğet doğru oluşturulmasında kullanılıyor. Dahası bu özellik buradaki yansımanın özellikleriyle doğrudan ilişkilidir.

Sonuç 3.4 (Siersma 1999) *Uçurtmanın tüm p noktalarının (geometrik) yeri conflict küme tanımıdır. Ayrıca burada ilginç bir dualite olduğu görülür. Buradaki S noktalarının yerine dikkat edilirse uçurtmanın baz noktalarıdır. Bu küme, aynı uzunluktaki A ve B teğet doğrularının olduğu yerdeki noktaların yeri olarak tanımlanmış olabilir. Bu küme, önceden muhtemelen çalışılmıştır. Ayrıca, farklı iki noktada aynı kümeye göre teğetlik durumu ilginç bir konudur.*

3.2. Eğrilik

İlk olarak, düzlemde bir bölgeye göre eş mesafe kümesinin eğriliğine bakalım. Sınırı C^2 sınıfından ve aynı zamanda küçük aralık için en az C^2 sınıfından düzgün olan eş mesafedeki küme olduğu varsayılacaktır. Dahası eş mesafedeki kümenin sınırının evolütünde olmayan noktalar da C^2 sınıfındandır ve singüler değildir.

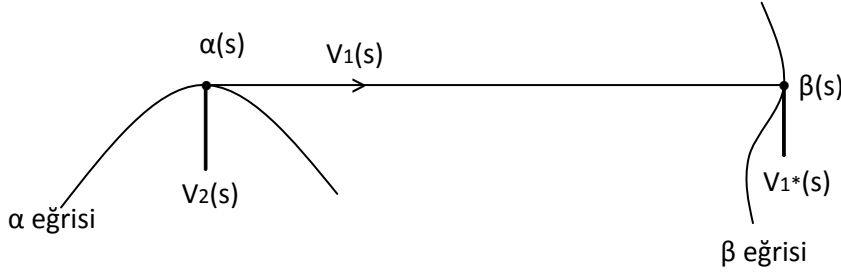
Tanım 3.5 (Hacısalihoglu 2000) α ve β , \mathbb{E}^n de iki eğri olsun. Bu eğriler (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarındaki Frenet- r ayaklısı sırasıyla

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere

$$\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$$

ise α eğrisine β eğrisinin **evolütü** denir.



Şekil 3.8 Evolüt eğrisi

Sonuç 3.6 (Siersma 1999) Bu koşullar, eş mesafe kümelerinin düzgün noktalarında eğriliğini tanımlamak için yeterlidir. Sınırdaki eğriliğin daha düşük bir mertebeden diferensiyellenebilirliği ile birkaç diğer durumda noktaların çoğu tanımlanabilir. Örneğin köşeler gibi yerlerde, eş mesafedeki kümeler çemberlerin yayları olabilir.

Tanım 3.7 (Hacısalihoglu 2000) \mathbb{E}^n üzerinde bir eğri (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} k_i & : I \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r \\ s & \longrightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

biçimindeki k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i -yinci eğrilik fonksiyonu** ve $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki α eğrisinin **i -yinci eğriliği** denir.

Özel olarak düzlem için bakılırsa; Frenet 2-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s)\}$ olur. Eğrilik fonksiyonu

$$k_1 = \langle V_1', V_2 \rangle$$

ve eğriliği

$$k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$$

olur.

Özel olarak uzay için bakılırsa; Frenet 3-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ olur. Eğrilik fonksiyonları

$$k_1 = \langle V_1', V_2 \rangle \text{ ve } k_2 = \langle V_2', V_3 \rangle$$

olur. Buradaki $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ ile de ifade edilebilir.

Tanım 3.8 (Sabuncuoğlu 2001) $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, α eğrisinin **eğrilik yarıçapı fonksiyonu** denir ve ρ ile gösterilir.

Önerme 3.9 (Hacısalihoglu 2000) \mathbb{E}^2 üzerinde bir α eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin ve s yay parametresi olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği $k(s)$ ve frenet 2-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s)\}$ ise

$$V_1'(s) = k(s) \cdot V_2(s)$$

olur.

İspat. $V_1(s) = \alpha'(s)$ olduğundan $V_1'(s) \in Sp\{\alpha'(s), \alpha''(s)\}$ olur. Buna göre $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$V_1'(s) = a_1 \cdot V_1(s) + a_2 \cdot V_2(s)$$

olur. $V_1'(s) = a_1 \cdot V_1(s) + a_2 \cdot V_2(s)$ iki tarafı $V_1(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = a_1 \cdot \langle V_1(s), V_1(s) \rangle + a_2 \cdot \langle V_2(s), V_1(s) \rangle$$

elde edilir. $\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 1$ ve $\langle V_2(s), V_1(s) \rangle = 0$ olduğundan

$$a_1 = \langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = 0$$

olur. $V_1'(s) = a_1 \cdot V_1(s) + a_2 \cdot V_2(s)$ iki tarafı $V_2(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle V_1'(s), V_2(s) \rangle = a_1 \cdot \langle V_1(s), V_2(s) \rangle + a_2 \cdot \langle V_2(s), V_2(s) \rangle$$

elde edilir. $\langle V_2(s), V_2(s) \rangle = 1$ ve $\langle V_1(s), V_2(s) \rangle = 0$ olduğundan

$$a_2 = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$$

eğrilik tanımı gereği $a_2 = k(s)$ olacağından

$$V_1'(s) = k(s) \cdot V_2(s)$$

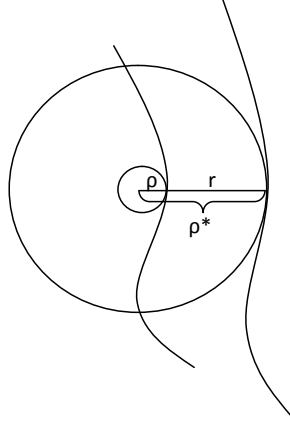
elde edilir. ■

Teorem 3.10 (Siersma 1999) P^* eş r -uzaklıktaki kümenin bir noktası ve P noktasına karşılık gelen ayak olsun. P noktasında sınır eğrisinin eğriliğinin yarıçapı ρ ve eğriliği κ olsun. Aynı şekilde P^* noktasına karşılık gelen notasyonlar ρ^* ve κ^* olsun. Buradan

$$\rho^* = \rho + r \quad \text{ve} \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{1 + \kappa \cdot r}$$

eşitlikleri vardır.

İspat. ρ ' nun ifadesi, ρ en uygun teğetsel çemberin yarıçapı olduğu gerçeğini ortaya çıkarır.



Şekil 3.9 (Eş mesafedeki ayak)

$\rho^* = \rho + r$ ifadesinde

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad \text{ve} \quad \rho^* = \frac{1}{\kappa^*}$$

yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\kappa^*} = \frac{1}{\kappa} + r$$

ifadesi elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{\kappa^*} = \frac{1 + \kappa \cdot r}{\kappa}$$

ifadesinden

$$\kappa^* = \frac{\kappa}{1 + \kappa \cdot r}$$

elde edilir. ■

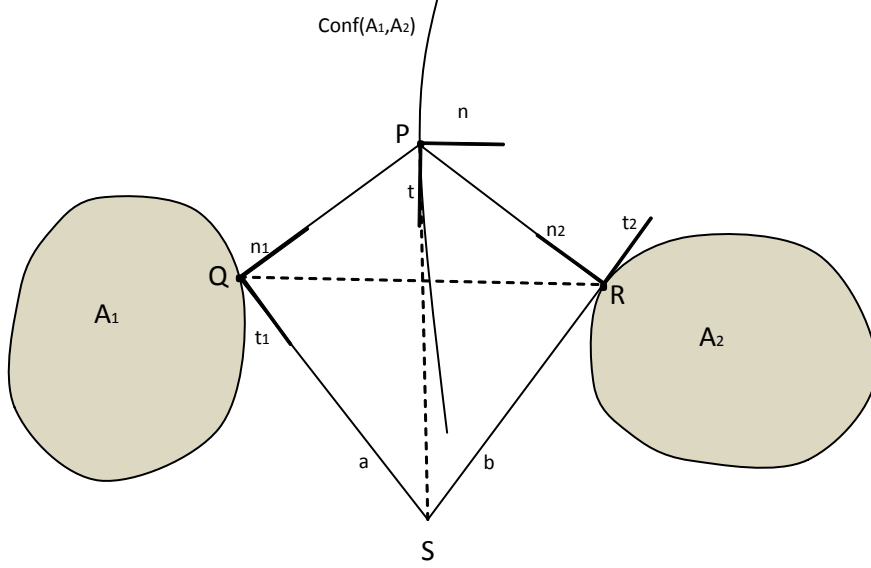
Gözlem 3.11 $\rho = -r$ olması durumunda evolutün bir noktasına sahiptir. Burada eş mesafe kümesi diferensiyellenemezdir. Bu durumda $\rho^* = r$ bir köşedir.

Teorem 3.12 (Siersma 1999) Düzlemde A_1 ve A_2 ayrık kümeleri sınırları C^3 sınıfından olan konveks conflict kümeler olsun. Conflict kümenin P noktasındaki eğriliği κ , A_i 'nin sınırındaki P ayasının eğriliği κ_i ve P' den A_i 'ye uzaklık r olsun. Buradan

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1 r} - \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2 r} \right) \sin \phi$$

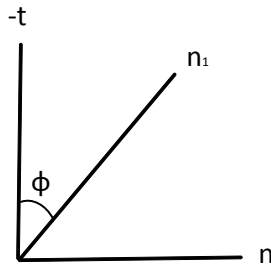
olur.

İspat. Conflict kümeye göre, normal vektörü belirlemek için uçurtma inşası kullanılacaktır. Eş r mesafedeki kümeler olarak A_1 ve A_2 kümelerini alalım. Bu kümelerin sınırları P noktasında kesişsin. Bu conflict kümeyi, teğet ve normal vektörleri etkilemez.



Şekil 3.10 (Conflict kümenin eğriliği)

Conflict küme, A_1 ve A_2 nin sınırlarının birim normal vektörleri n , n_1 ve n_2 ; birim teğet vektörleri t , t_1 ve t_2 ; yay uzunluğu sırasıyla s , s_1 , s_2 olsun. Ayrıca n_i ile t arasındaki açı ϕ olsun. Buradaki

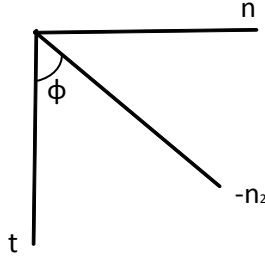


Şekil 3.11

ifadesinden

$$n_1 = n \cdot \sin \phi - t \cdot \cos \phi \dots (1)$$

elde edilir. Ayrıca



Şekil 3.12

ifadesinden

$$-n_2 = n \cdot \sin \phi + t \cdot \cos \phi \dots (2)$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla; (1) ve (2) ifadelerinin toplamından

$$n = \frac{n_1 - n_2}{2 \cdot \sin \phi}$$

elde edilir. Aynı şekilde; (1) ve (2) ifadelerinin farkından

$$t = \frac{n_1 + n_2}{-2 \cdot \cos \phi}$$

elde edilir. Şimdi

$$n = \frac{n_1 - n_2}{2 \cdot \sin \phi}$$

ifadesinden s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d}{ds}(n) = \frac{d}{ds} \left(\frac{n_1 - n_2}{2 \cdot \sin \phi} \right)$$

çarpımın türevinden

$$\frac{dn}{ds} = \left(\frac{dn_1}{ds} - \frac{dn_2}{ds} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \phi} + (n_1 - n_2) \left(\frac{1}{2 \cdot \sin \phi} \right)'$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{dn}{ds} = \left(\frac{dn_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} - \frac{dn_2}{ds_2} \cdot \frac{ds_2}{ds} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \phi} + (n_1 - n_2) \left(\frac{1}{2 \cdot \sin \phi} \right)'$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{dn_i}{ds_i} = \kappa_i^* \cdot t_i$ olduğundan

$$\frac{dn}{ds} = \left(\kappa_1^* \cdot t_1 \cdot \frac{ds_1}{ds} - \kappa_2^* \cdot t_2 \cdot \frac{ds_2}{ds} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \phi} + (n_1 - n_2) \left(\frac{1}{2 \cdot \sin \phi} \right)'$$

elde edilir. Eğriliği hesaplamak için eşitliğin iki tarafı t ile iç çarpım yapılırsa

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{ds_2}{ds} = \sin \phi ,$$

$$(n_1 - n_2) \cdot t = (2 \cdot n \cdot \sin \phi) \cdot t = 2 \sin \phi \cdot \langle n, t \rangle = 0 ,$$

$$t_1 = n \cdot \cos \phi + t \cdot \sin \phi \text{ den } \langle t, t_1 \rangle = \sin \phi ,$$

$$t_2 = -n \cdot \cos \phi + t \cdot \sin \phi \text{ den } \langle t, t_2 \rangle = \sin \phi$$

ifadeleri kolayca hesaplanarak yerine yazılır. Buradan

$$\langle t, n' \rangle = (\kappa_1^* \cdot \sin \phi \cdot \sin \phi - \kappa_2^* \cdot \sin \phi \cdot \sin \phi) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \phi}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\langle t, n' \rangle = \frac{1}{2} (\kappa_1^* - \kappa_2^*) \cdot \sin \phi$$

olur. Buradan da

$$\kappa = \frac{1}{2} (\kappa_1^* - \kappa_2^*) \cdot \sin \phi$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

4. Uzaklığın Etkisi Johnson-Mehl Modeli

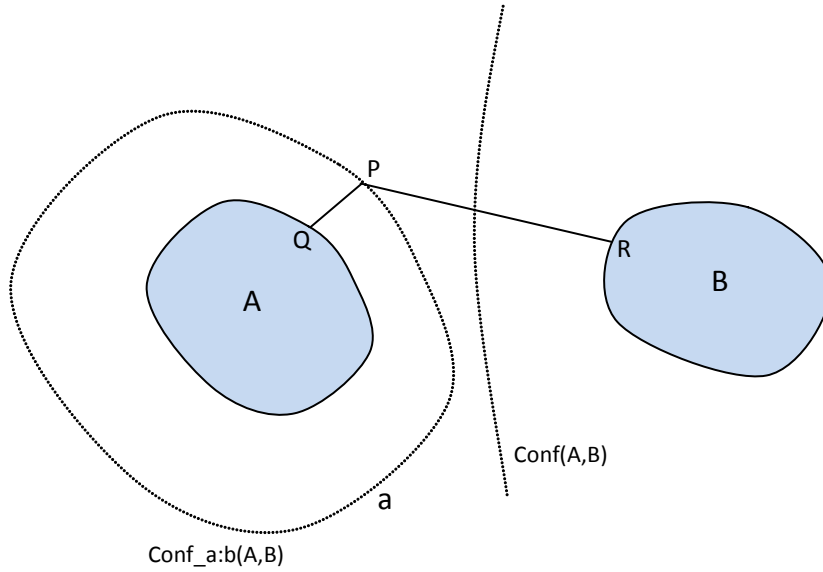
Bu model A ve B kümelerinin herbirinin birbirine a ve b etkisini verir. $d(x, A)$ Öklidyen uzaklık olsun, yeni uzaklıklar

$$d_w(x, A) = \frac{1}{a}d(x, A)$$

ile tanımlanır. Conflict kümede metriğin etkisi

$$Conf_{a:b}(A, B) = \frac{d(x, A)}{a} = \frac{d(x, B)}{b}$$

ile verilir.

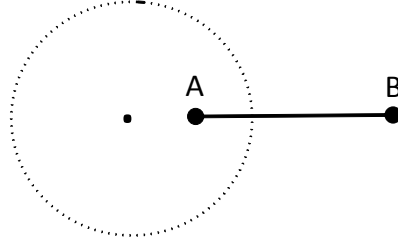


Şekil 4.1 (Uzaklığın etkisi)

Eğer $a \neq b$ ise A ve B kompakt kümeleri için conflict kümenin etkisi(weighted) kompakt bir eğridir(Şekil 4. 4). Sadece $a = b$ olması durumunda conflict küme sınırlı değildir. Aşağıdaki durumlarda JM-conflict kümeleri listelenmiştir ($a \neq b$ alınır) (Siersma 1999).

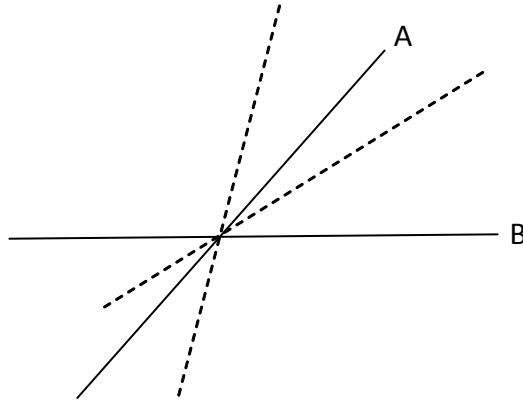
Düzlemde üç nesneye; herhangi biri nokta, doğru veya çember olabilir ; aynı anda teğet olan bir çember çizilebilir.Bu konu bugünde apollonius problemi olarak bilinmektedir.Bu nesnelere üç doğru, üç nokta ve üç çember olabileceği gibi bunların herhangi bir kombinasyonu da olabilir.

Örnek 4.1 (Nokta-nokta): *JM-bisector bir çemberdir (apollonius çemberi).*



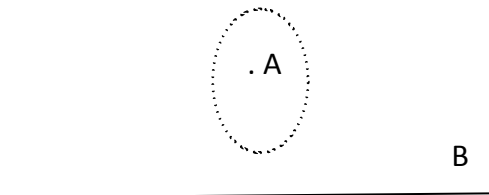
Şekil 4.2 (Nokta-nokta JM bisector)

Örnek 4.2 (Doğru-doğru): *JM-bisector bir çift düz doğrudur.*

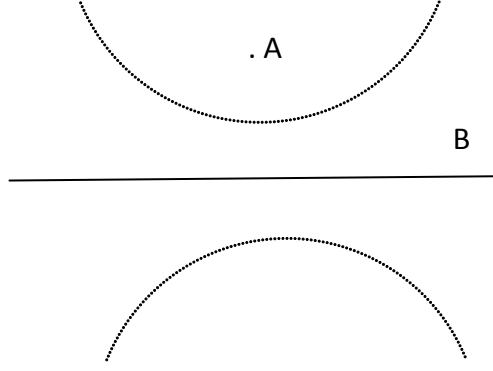


Şekil 4. 3 (Doğru-doğru JM bisector)

Örnek 4.3 (Doğru-nokta) *Eğer $a > b$ ise JM-parabolü bir elipstir , $a < b$ ise JM-parabolü bir hiperboldür.*



Şekil 4.4 (Doğru-nokta JM bisector)



Şekil 4.5 (doğru-nokta JM bisector)

Yukarıdaki örnekler bir konik kesiti için mümkün tanımları verir. Coxeter' e göre bir konik için daha eski tanımlarda, M. Ö. 340' larda Menaechmus çalışmalarında daha sonra da Öklid'in çalışmalarında yer almıştır (Siersma 1999).

Uçurtma inşası etkiye göre aşağıdaki gibi oluşturulabilir. Bunu, $Conf_{a,b}(A, B)$ nin her P noktası için $PSQR$ dörtgenini oluşturularak üretilebilir. Bu JM-uçurtması bir çevrel çembere sahiptir (Şekil 4.1).

4.1. JM-uçurtması ile ilgili geometrik formüller

JM-uçurtmasının şekli, $\gamma = \angle QPR$ tepe açısı ve $a : b$ oranı tarafından belirlenir. Bu verilerden $\alpha = \angle QPS$ ve $\beta = \angle RPS$ belirlenir.

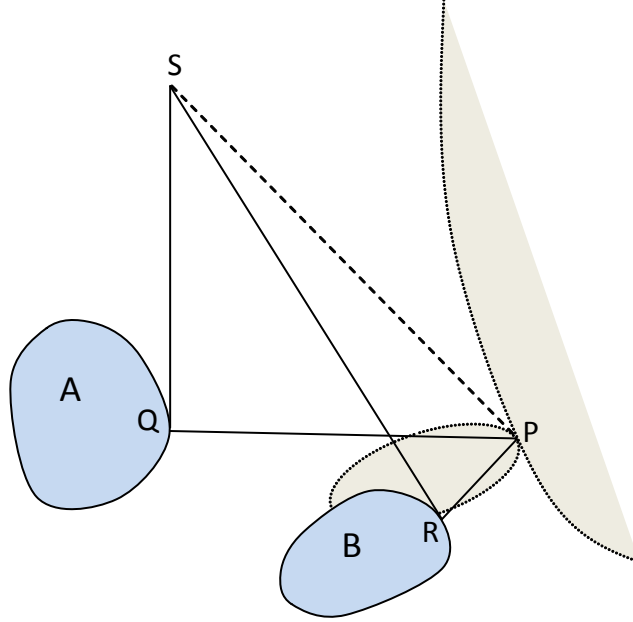
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha + \beta)}$$

olduğundan

$$\sin \alpha = \frac{b - a \cdot \cos \gamma}{c} \quad \text{ve} \quad \sin \beta = \frac{a - b \cdot \cos \gamma}{c}$$

şeklinde olur. JM-uçurtmasının köşegenleri ve kenarlarının uzunluğu, r -mesafedeki JM ile orantılıdır.

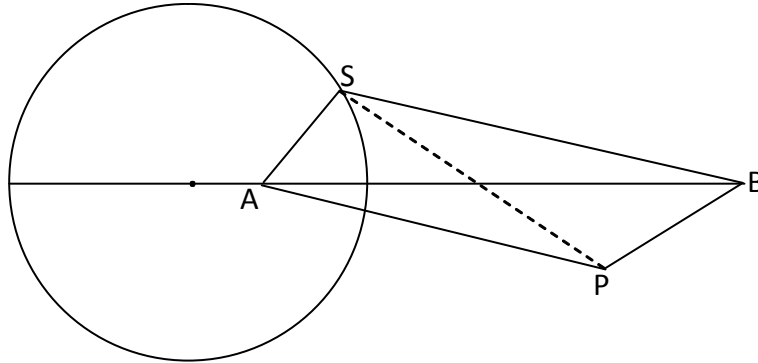
İspat. Buradaki diferensiyellenebilme Öklid uzayındaki duruma benzerdir (teorem 3.11). Conflict küme $Terr(A^+, R)$ ve $Terr(B^+, Q)$ arasında sıkışmıştır. Aynı zamanda PS köşegeni tümleyendir.



Şekil 4.8 (JM uçurtmasında sıkıştırıcının şekli)

Sıkıştırıcı şekil 4.8 de gösterilmiştir. ■

Gözlem 4.5 (Siersma 1999) A ve B noktalar olması durumunda, A ve B 'nin teğet özelliğinin geometrik anlamına bakalım: Bir ABP üçgeni verilsin.



Şekil 4.9 (Kümeler noktalar alınınca JM'nin geometrik şekli)

AP 'ye dik ve A 'dan geçen doğru ile BP 'ye dik B 'den geçen doğrular S noktasında kesişinler. K ve L , AB doğrusu ile ABP üçgeni ile iç ve dış açıortayların kesişim noktaları olsun. Buradan PS , yarıçap olarak KL ile çembere teğettir (Şekil 4-9).

Önerme 4.6 (Siersma 1999) Düzlemde JM-conflict kümelerin eğriliği. A_1 ve A_2 ,

sınırları C^2 sınıfından olan düzlemde iki ayrık konveks küme olsun. Buradan

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)}} \left(\frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1 ar} b \sin^2 \alpha - \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2 br} a \sin^2 \beta \right)$$

elde edilir. Burada ki κ conflict kümenin bir P noktasındaki eğriliği, κ_i de A_i ' nin sınırındaki P ayağının eğriliği ve r , P ' den A_i ' ye JM-uzaklığıdır ; α , P deki conflict küme ile A_1 ' deki izdüşüm doğrusu arasındaki açı ve β , P deki conflict küme ile A_2 deki izdüşüm doğrusu arasındaki açıdır.

İspat. Conflict kümede normal vektörü belirlemek için (şekil 3. 3) uçurtma inşaasını kullanalım. Teorem 3.11 de alınan anlamda n , n_1 , n_2 , t , t_1 ve t_2 kullanılsın. α , n_1 normali ile t arasındaki açı ve β , n_2 normali ile t arasındaki açıdır. Burada

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)}$$

ifadesinden

$$n = \frac{bn_1 - an_2}{c}$$

ve

$$t = -\frac{bt_1 + at_2}{c}$$

olduğunu görülür. r mesadaki JM kümeleri ile A_1 ve A_2 belirlenir. Sınırlar P noktasında kesişsin. Bu conflict kümeyi etkilemez. Aynı zamanda teğet ve normal vektörleri de etkilemez. s conflict küme için yay uzunluğu ve s_i ' ler de r mesafedeki kümelerin sınırları için yay uzunluğu parametresi olsun. Bu parametre yardımıyla n ' den türev alınırsa

$$\frac{dn}{ds} = \left(b \frac{dn_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} - a \frac{dn_2}{ds_2} \cdot \frac{ds_2}{ds} \right) \frac{1}{c} + (bn_1 - an_2)(\dots)$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= (b\kappa_1^* t_1 \frac{ds_1}{ds} - a\kappa_2^* t_2 \frac{ds_2}{ds}) \frac{1}{c} + (bn_1 - an_2)(\dots)$$

olur. κ eğriliğini hesaplamak için, t ile iç-çarpım almak yeterlidir. Burada

$$t_1 \cdot t = \sin \alpha ; t_2 \cdot t = \sin \beta ; (bn_1 - an_2)t = 0$$

ifadesinden

$$\kappa = (b\kappa_1^* t_1 \cdot t \frac{ds_1}{ds} - a\kappa_2^* t_2 \cdot t \frac{ds_2}{ds}) \frac{1}{c}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{ds_1}{ds} = \sin \alpha ; \frac{ds_2}{ds} = \sin \beta$$

ifadesinden

$$\kappa = (b\kappa_1^* \sin \alpha \frac{ds_1}{ds} - a\kappa_2^* \sin \beta \frac{ds_2}{ds}) \frac{1}{c}$$

olur. Buradan da

$$\kappa = \frac{b\kappa_1^* \sin^2 \alpha - a\kappa_2^* \sin^2 \beta}{c}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki geometrik formüllerde γ 'nın ifadesi ile α ve β yer değiştirebilir. Buradan da

$$\kappa = \frac{b \cdot \kappa_1^* (b - a \cos \gamma)^2 - a \cdot \kappa_2^* (a - b \cos \gamma)^2}{c^3}$$

elde edilir.

Örnek 4.7 (Siersma 1999) *Eğer bölgeler noktalar ise bizi alışılmaş Apollonius durumuna götürür. Bunun için uygun şekilde hesaplamaları yaparak*

$$\kappa = \frac{b^2 - a^2}{rabc} = \frac{b^2 - a^2}{ab \cdot d(A, B)}$$

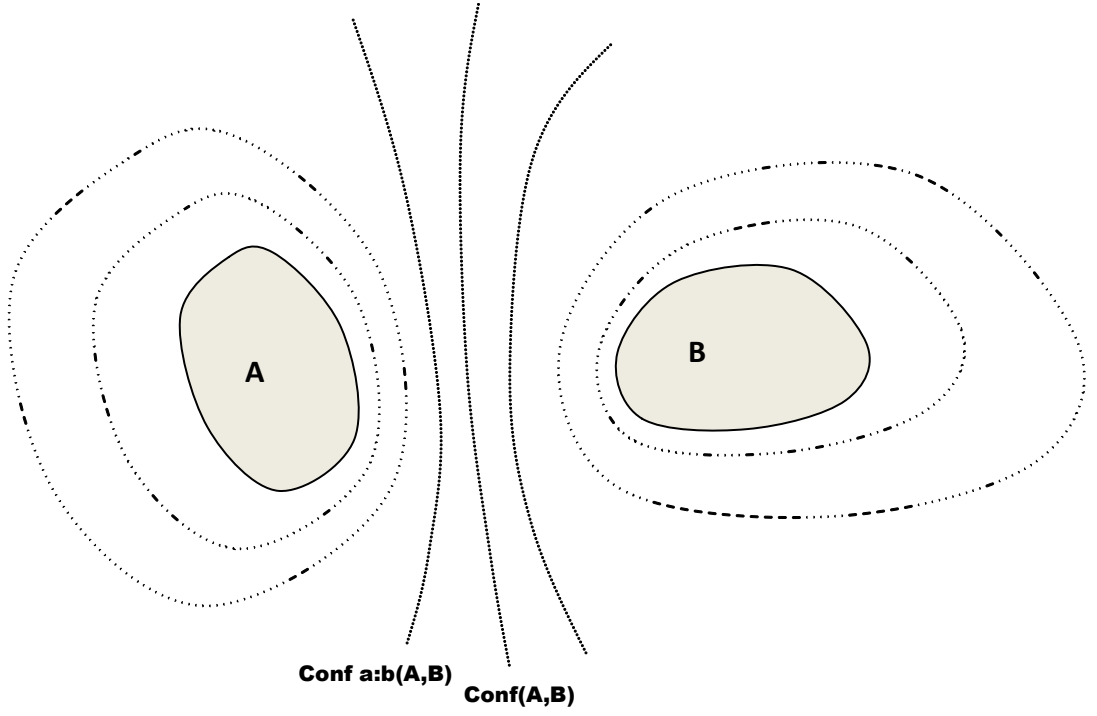
eğrilik formülleri yeniden üretilebilir. Bu

$$R = \frac{ab}{b^2 - a^2} \cdot d(A, B)$$

apollonius çemberinin yarıçapı için bilinen formüller ile uyumludur.

4.2. Yapraklanma Mesafesi

Düzlemde herhangi bir nokta için, $d(x, A) : d(x, B)$ yarıçapı düşünlün. Öklid düzleminde $[0, \infty)$ a bir fonksiyon tanımlansın. Bu seviye çizgileri düzlemi yapraklara ayırır ve $a = 0$ veya $b = 0$ olmadıkça, onlar verilen a:b etkisi için JM-conflict çizgileridir (şekil 11). Yapraklanmaya teğet doğru uçurtma inşası ile verilir (Siersma 1999).



Şekil 4.10 (Yapraklanma mesafesi)

5. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, Conflict Küme' nin bazı özellikleri verilerek, uçurtmasının inşası gösterilmiş. Ayrıca yeni Conflict Küme örnekleri gösterilmiştir. Sonra da Conflict Kümenin düzgünlüğü ve eğriliği gösterilmiştir. En son olarak da uzaklığın etkisi ve yapraklanma mesafesi verilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- COXETER, H. S. M. 1961. Introduction to Geometry , New York.
- GODDİJN, A., 1997. Smoothness Properties of Conflict Sets, Utrecht, University Utrecht.
- HACISALİHOĞLU, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri 1.Cilt, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara, 268 ss.
- MANEN, M. and SIER SMA, D. 2003. The Geometry of Conflict Sets. Polish Acad. Sciences, 100 pp.
- MUCUK, O. 2009. Topoloji, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara., 358 ss.
- SABUNCUOĞLU, Arif. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 434 ss.
- SIER SMA, D. 1999. Properties of Conflict Sets in the Plane. *Polish Acad. Sciences*, 267-276 ss.
- SOTOMAYOR, J. 1998. Curvatures of Conflict Surfaces in Euclidean 3-space. *Polish Acad. Sciences*, 50(1): 277-285.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Karaman'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya' da tamamladı. Lisans öğrenimine 2005 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başlayıp, 2009 yılında mezun oldu. 2010 Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen aynı bölümde yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.